អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

តើវិធីខ្ចប់ក្រូចធ្វើយ៉ាងណា? ការប្រមាណរបស់កេភ្លឺ (*Kepler*) ពីការខ្ចប់ស្វៃ

រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ:Christiane Rousseau។

តើការខ្ចប់ស្វៃឱ្យណែនគឺជាអ្វី? ការប្រមាណរបស់កេភ្លឺ គឺជាអ្វី ដែល អ្នកធ្លាប់ឃើញនៅតាមហាងលក់ផ្លែឈើ ដែលគេ ហៅថា face-centered cubic lattice[1] (រូបភាពទី1)។ នៅ ក្នុងសន្និសីទគណិតវិទ្យាអន្តរជាតិ ឆ្នាំ 1900 ដេវីត ហ៊ីលប៊ឺត (David Hilbert) បានធ្វើបទបង្ហាញដ៏ល្បីល្បាញ ដែលមានបញ្ហា 23 សំខាន់ៗ សម្រាប់ការស្រាវជ្រាវគណិតវិទ្យា នៅសតវត្សទី 20។ បញ្ហា ខ្ចប់ស្វៃឱ្យណែន ឬហៅបានថា ការប្រមាណកេភ្លឺ ជាចំណុចទី ១៨ ក្នុងចំណោម បញ្ហា ដែលបានលើកឡើងដោយ ហ៊ីលប៊ឺត។ ការប្រមាណកេភ្លឺ ទើបតែបាន ស្រាយបញ្ជាក់នៅឆ្នាំ1998ដោយ ថូម៉ាស ហេលស៍ (Thomas Hales) ហើយដំណោះ ស្រាយលម្អិត ទើបតែបានបោះពុម្ពនៅឆ្នាំ 2006 ប៉ុណ្ណោះ។

១. តើយើងដោះស្រាយបញ្ហាបែបនេះដូចម្តេច?

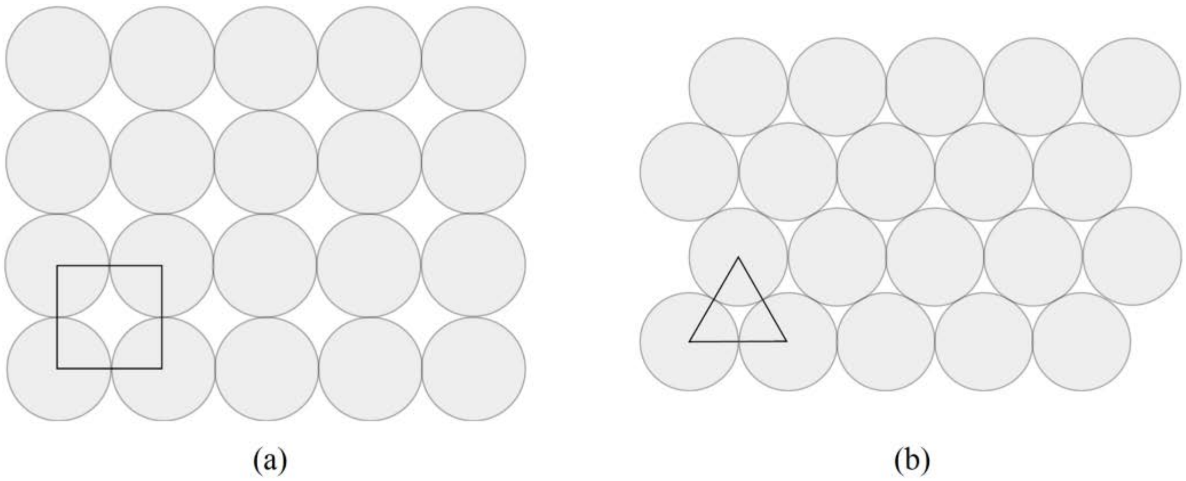
យើងសន្មតថាមានបណ្តុំផ្សេងៗគ្នា នៃស្វៃទំហំប៉ុនៗគ្នា (បាល់សូលីដ) នៅក្នុងលំហ ហើយសម្រាប់ករណីនីមួយៗ យើងគណនាដង់ស៊ីតេនៃកញ្ចប់ មានន័យថា មាឌសរុបដែល ស្វៃទាំងនោះបានតាំងនៅ (ស៊ីកន្លែង)។ យើងហៅ p_n ជាដង់ស៊ីតេ នៃបណ្តុំរបស់ស្វៃក្នុងវិមាត្រ n។ ជាការពិតណាស់ ដង់ស៊ីតេនេះ វាអាស្រ័យទៅនឹងរូបរាងរបស់ផ្ទៃកនោះ។ ដើម្បីជៀសវាងបញ្ហានេះ យើង សន្មតថា យើងមានផ្ទៃកដ៏ធំទូលាយមួយសម្រាប់ធ្វើការ ដូច្នេះអំពើនៃការកម្រិតព្រំដែន អាចចោល បាន។ ការប្រមាណកេភ្លឺ បង្កើតឡើងក្នុងឆ្នាំ1611 ពោលថា ការខ្ចប់ក្រូចដ៏ណែនបំផុត មានទម្រង់ដូចដែល អ្នកបានឃើញអ្នកលក់តម្រៀបនៅផ្សារ។ ចុះ ហេតុអ្វី បានជាសម្រាយបញ្ជាក់ ការប្រមាណនេះត្រូវការពេល យូរម្លេះ? បញ្ហានៅត្រង់ថា យើងមានលទ្ធភាពច្រើនរាប់មិនអស់ក្នុងការតម្រៀប ស្វៃ។ រៀងរាល់ ពេលដែលយើងតម្រៀបស្វៃ យើងអាចបង្ហាញថាដង់ស៊ីតេវា តិចជាង ឬស្មើទៅនឹងការតម្រៀបនៅផ្សារ។ បញ្ហាមួយទៀតត្រង់ថា តម្រៀបរបស់ យើង អាចធ្វើតែក្នុងចំនួនកំណត់មួយ។ បើទោះជាពិនិត្យតែតម្រៀបមួយបែបក៏ដោយ ក៏ ការគណនាដង់ស៊ីតេ មានការលំបាក ឬមិនមានលទ្ធភាព បើតម្រៀបនោះមិនមានលក្ខណៈខួប។

បញ្ហាដង់ស៊ីតេនៃការខ្ចប់បាល់សូលីដ មាននៅក្នុងគ្រប់វិមាត្រទាំងអស់។ សម្រាប់វិមាត្រពីរ ត្រូវបានដោះស្រាយក្នុងឆ្នាំ1890។ បញ្ហាខ្ចប់បាល់នៅវិមាត្រខ្ពស់ជាងនេះ មានការអនុវត្តជាច្រើន ដូចជា កំណែរតម្រូវកូដជាដើម។

នៅក្នុងវិមាត្រពីរ យើងជួបប្រទះរួចមកហើយនូវ បញ្ហាលំបាកទាំងពីរ គឺ យើងមិនអាចកំណត់គ្រប់តម្រៀបទាំងអស់ និង ភាពគ្មានខួបនៃតម្រៀប ។ យើងនឹងបង្ហាញថាតើយើងជម្នះការលំបាកទាំងនេះយ៉ាងដូចម្តេច? យើងនឹងបង្ហាញផងដែរ ពីឧបសគ្គដែលរារាំងមិនឱ្យមានទូទៅកម្មដល់ករណី វិមាត្រ ៣ ហើយនឹងបញ្ចប់ដោយពំនោលតិចតួចពីវិមាត្រខ្ពស់ជាងនេះ។

[1] ដោយពិបាករកពាក្យប្រែជំនួស យើងរក្សាពាក្យដើមរបស់វា

២. ករណីវិមាត្រពីរ



ពិនិត្យតម្រៀបនៃថាសពីរបែបក្នុង រូបទី 2។ វាជាការងាយស្រួល ដើម្បីគណនាផលធៀប ផ្ទៃកនៃ ការ៉េនីមួយៗ ដែលគ្រប់ដណ្តប់ដោយភាគនៃថាសក្នុងករណី (a) និង ផលធៀបផ្ទៃកនៃត្រីកោណ ដែលគ្រប់ដណ្តប់ដោយភាគនៃថាស ក្នុងករណី (b)។ បន្ទាប់មកយើងឃើញថាតម្រៀបទី២ គឺមានដង់ស៊ីតេធំជាងតម្រៀបទី១។ ពិត ណាស់ តម្រៀប (a) មានដង់ស៊ីតេ $\frac{\pi}{4} = 0.7853$ ខណៈដែលតម្រៀប (b) មានដង់ស៊ីតេ

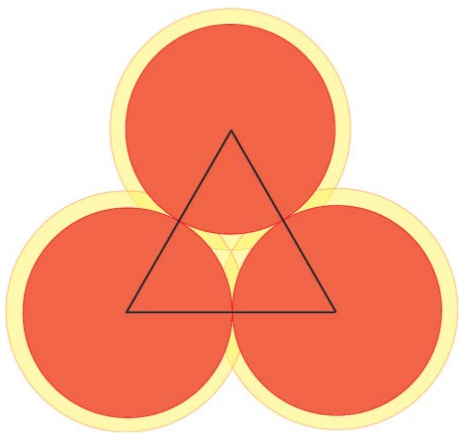
$$\rho_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.9069$$

រៀងរាល់លើក យើងសន្មតថាមានខួបនៃការខ្ចប់ ហើយអាចបង្ហាញថាវាមានដង់ស៊ីតេ តូចជាងតម្រៀប ក្នុងរូប ទី2 (b)។

ប៉ុន្តែ តើយើងបង្ហាញថាវាជាករណីសម្រាប់គ្រប់ការខ្ចប់យ៉ាងដូចម្តេច?

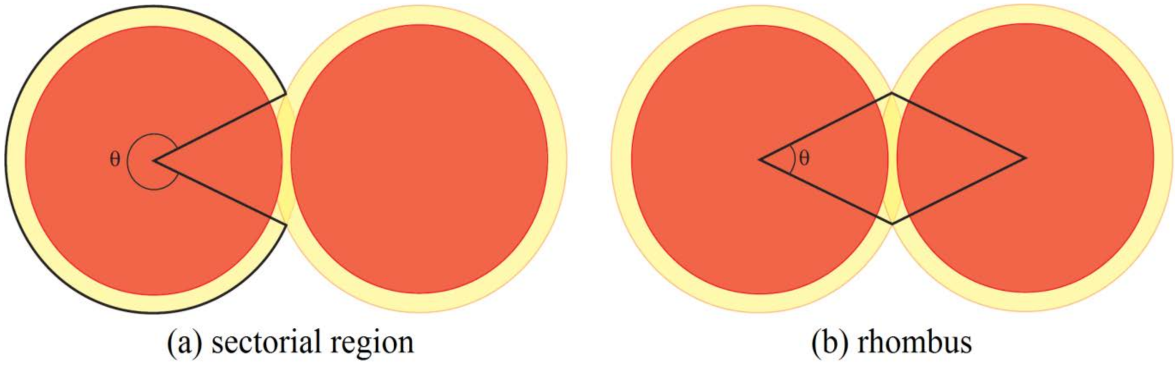
វាជាគំនិតដ៏ឆ្លាតវៃ បើយើងត្រឡប់ក្រោយទៅរកអ្នកគណិតវិទ្យាណ័រវែស អែកសល ធូ (Axel Thue) ក្នុងឆ្នាំ 1890។ យើងចែកប្លង់ ជា ផ្ទៃក ហើយយើងបង្ហាញថានៅគ្រប់ផ្ទៃកទាំងអស់ ដង់ស៊ីតេ នឹង តូចជាង ឬស្មើទៅនឹង $\rho_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$។ យើងមើលរូបទី 3 យើងមានថាសបី មិនអាចខិតជិតគ្នាបាន។ សង្កេតមើល ត្រីកោណ មានកំពូលជាផ្ចិតនៃថាសទាំងនោះ។ ខាងក្នុងត្រីកោណនេះ មានផ្ទៃកតូចមួយមិនគ្របដណ្តប់ដោយថាស។ឧបមាថា យើងអាចពង្រីកថាសដោយកត្តា $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$ បន្ទាប់ពីនោះមកត្រីកោណពង្រីកនេះ បានគ្របផ្ទៃកនោះយ៉ាងពេញលេញ ហើយកត្តា c ជាតម្លៃអប្បបរមា សម្រាប់ការណ៍នេះ។

\`



រូបភាពទី3: ផ្ទៃកតូចមួយនៅចន្លោះថាសទាំងបី

យើងប្រើមធ្យោបាយនេះដើម្បីចែកប្លង់ជាផ្នែកសមរម្យមួយ។ យើង សន្មតការខ្ចប់របស់ថាស មាន កាំ r ។ ថាសនីមួយៗ យើងបង្កប់វាទៅ ក្នុងថាសមួយទៀត ដែលមានផ្ចិតរួមគ្នា និងកាំ $R = cr$ យើងហៅថា ថាសធំ។ ឥឡូវយើងអាចកំណត់ផ្នែកទាំងបីរបស់យើង ផ្នែកទីមួយ គឺជាប្រជុំនៃថាសធំ។ ជាក់ស្តែងណាស់ ដង់ស៊ីតេនៃផ្នែកនោះគឺស្មើ ០ ។ ផ្អែកលើចម្ងាយរវាងផ្ចិត ថាសធំ អាចត្រួត ឬក៏មិនត្រួតលើគ្នា។ ពេលថាសធំត្រួតគ្នា រង្វង់ខាងក្រៅរបស់វាប្រសព្វគ្នា។ យើងភ្ជាប់ចំណុចប្រសព្វលើរង្វង់ទៅផ្ចិត វិធីសាស្ត្រនេះ បាន ចែកថាសធំទៅជាច្រើនផ្នែក។ មានប្រភេទពីរនៃផ្នែកទាំងនេះ៖



រូបភាពទី4: ប្រភេទនៃផ្នែកពីរដែលមានដង់ស៊ីតេខុសពីសូន្យ

- ផ្នែកនៅក្នុងថាសធំដែលមិនត្រួតគ្នាជាមួយថាសផ្សេង(មើល រូបទី4 (a)។ ក្នុងផ្នែកថាសនេះ ដង់ស៊ីតេ ស្មើនឹង $\frac{1}{c^2}=\frac{3}{4}$ ។
- ផ្នែកក្នុងថាសធំដែលត្រួតគ្នា ដូចរូបទី4 (b)។ យើងយកផ្នែកទាំងនេះដាក់ជាគូ ដូចនៅក្នុងរូប។ ប្រសព្វនៃផ្នែកទាំងពីរ គឺជាចតុកោណស្មើ យើងត្រូវរក ដង់ស៊ីតេក្នុង ចតុកោណ ស្មើនេះ។ ដោយ ចម្ងាយរវាងផ្ចិតថាសទាំងពីរ យ៉ាងតិច ស្មើនឹង 2r ព្រោះថាសមិនត្រួតគ្នា ការគណនាបង្ហាញថា ការតម្លៃមុំអតិបរមា គឺ $\frac{\pi}{3}$។ តាង θ ជាមុំនោះ។ ដង់ស៊ីតេក្នុងចតុកោណស្មើ អាស្រ័យទៅនឹងមុំ θ៖ វាជាផលធៀប រវាងផ្ទៃក្រឡាផ្នែកទាំងពីរនៃថាស លើផ្ទៃក្រឡានៃចតុកោណស្មើ។ ផ្នែកនីមួយៗ នៃថាសមានផ្ទៃ $\frac{r\theta}{2}$។ ដូចនេះ ផ្ទៃនៃផ្នែកដែលគ្របដោយថាសក្នុងចតុកោណស្មើ មានតម្លៃ $r\theta$ ។ ផ្ទៃនៃចតុកោណស្មើ មានជ្រុង R និងមុំ θ បានពីការបំបែកចតុកោណស្មើ ទៅជាត្រីកោណ។ វាមានតម្លៃស្មើនឹង $2R\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=R\sin\theta$ ។ ដូច្នេះដង់ស៊ីតេវា គឺ

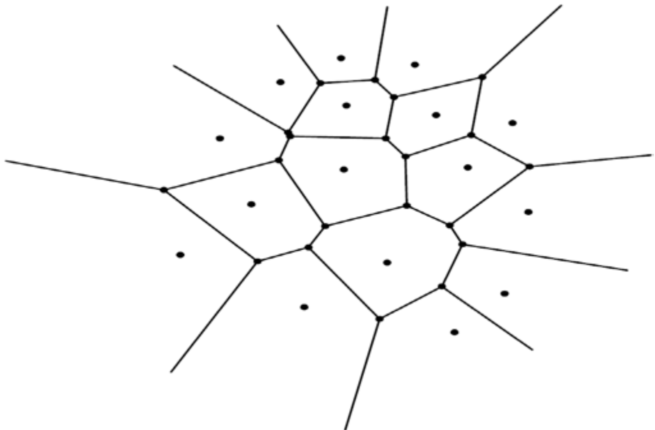
  $\mu(\theta)=\frac{r^2\theta}{R^2\sin\theta}=\frac{3\theta}{4\sin\theta}$ ។

  វាគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ $\mu(\theta)$ ក្នុងចន្លោះ $[0,\frac{\pi}{3}]$ ហើយដើម្បីឱ្យឃើញថា វាមានតម្លៃអតិបរមាត្រង់ $\mu(\frac{\pi}{3}) = p_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ ។ ពិតណាស់ $\mu'(\theta)=\frac{3}{4}\times\frac{\tan\theta-\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}>0,$ ដោយ $\tan\theta>\theta$

ដំណោះស្រាយមួយនេះមានចម្លើយល្អបំផុត។ ឥឡូវយើងពិនិត្យលម្អិតលើទ្រង់ទ្រាយរបស់វា។ ដង់ស៊ីតេដែលល្អបំផុតគឺ ρ_2 ។ វាជាដង់ស៊ីតេដ៏ល្អផងដែរ សម្រាប់ផ្នែកនីមួយៗនៃប្លង់ ដែលយើងបានពិនិត្យ។

មានវិធីមួយផ្សេងទៀតដើម្បីបែងចែកប្លង់ទៅជាផ្នែក។ គឺជា ដ្យាក្រាម វ៉ូរ៉ូណយ (Voronoi diagram) នៃសំណុំរបស់ផ្ចិតនៃថាស។ ពិនិត្យសំណុំ s នៃចំណុចនៅលើប្លង់ ដ្យាក្រាម វ៉ូរ៉ូណយ នៃ s ជាចំណែកនៃប្លង់ ដែលត្រូវនឹងចំណុច P នៃ s ដែលចំងាយពីគ្រប់ចំណុចនៃផ្នែកនោះ ទៅកាន់ចំណុច P ខ្លីជាងចំងាយទៅកាន់ចំណុច P' ដទៃទៀតនៃ s ។

ផ្នែកទាំងនោះត្រូវបានគេហៅថា កោសិកា វ៉ូរ៉ូណយ (Voronoi cells)។ បើគេគូរខ្សែមេដ្យាទ័រនៃ PP' ដែលជារូបធរណីមាត្រនៃចំណុច ដែលមានចម្ងាយស្មើទៅចំណុច P និង P' នោះវាមិនមានអ្វីចម្លែកទេ ដែល វាបង្កើតនូវដ្យាក្រាម វ៉ូរ៉ូណយ ដែលជាសំណុំចំណុចដូចជារូបភាពទី 5 ដែលមានជ្រុងរួម រវាងគូចំណុច។ កោសិកា វ៉ូរ៉ូណយ ខណ្ឌដោយអង្កត់នៃខ្សែមេដ្យាទ័រនៃសំណុំចំណុចs រវាងកោសិកាពីរ។



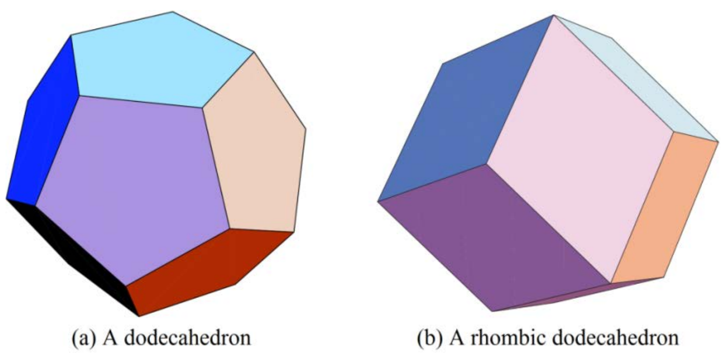
រូបភាពទី 5: ដ្យាក្រាម វ៉ូរូណយ ភ្ជាប់ទៅចំណុចនមួយៗនេសណុs ជាកោសិកា វ៉ូរ៉ូណយ

ពេលដែលចង់ខ្ចប់ថាសក្នុងប្លង់ តាម ធម្មជាតិ ដែលយើងសម្លឹងទៅ ដ្យាក្រាម វ៉ូរ៉ូណយ នៃសំណុំផ្ចិតនៃថាស។ ឥឡូវ យើងត្រឡប់ ទៅក្រោយវិញ មើលឧទាហរណ៍នៃរូបភាពទី 2។ ផ្នែកខាងឆ្វេង កោសិកា វ៉ូរ៉ូណយ ជាការ៉េ។ ឯផ្នែកខាងស្តាំគឺជាឆកោណ ហើយដង់ស៊ីតេក្នុងថាសនីមួយៗ ក្នុងកោសិកាវ៉ូរ៉ូណយឆកោណ មានតម្លៃប្រាកដស្មើនឹង ρ_2។ គួរកត់សម្គាល់ថា ចូរចងចាំថា ការហ៊ុំព័ទ្ធថាសមួយដោយថាសដទៃមានកាំដូចគ្នាដោយមិនត្រួតគ្នា នោះកោសិកា វ៉ូរ៉ូណយ ដែលមានផ្ទៃអប្បបរមា គឺបណ្តុំនៃឆកោណ។

៣. ករណីវិមាត្របី

៣.១ ភាពលំបាកនៃបញ្ហា

វាជាធម្មជាតិមួយដែលគេព្យាយាមធ្វើទូទៅកម្មគំនិតដដែលសម្រាប់ករណីវិមាត្របី។ ដ្យាក្រាម វ៉ូរ៉ូណយ នៅអាចសង់បានដូចពេលមុន។ កោសិកាដែលប្រហាក់ប្រហែលបំផុត គឺ ពហុ មុខប៉ោង។ ឥឡូវយើងព័ទ្ធជុំវិញស្វ៊ែមួយដោយដាក់ស្វ៊ែដទៃត្រឹមតែប៉ះនឹងវា។ យើងអាចដាក់ស្វ៊ែ បាន 12។ ប៉ុន្តែខុសពីករណីក្នុងប្លង់ មានចន្លោះនៅសល់ជុំវិញស្វ៊ែដំបូង។ យើងអាចព្យាយាមផ្លាស់ប្តូរស្វ៊ែទាំង12 ឱ្យត្រឹមតែទល់គ្នាហើយរកចន្លោះដាក់ស្វ៊ែទី 13។តែករណីនេះបានស្រាយបញ្ជាក់ដោយ ថូម៉ាស ហេលស៍ (Thomas Hales) ថាវាមិនអាចទេ។ ប៉ុន្តែមានវិធីមិនសមមូលជាច្រើនក្នុងការដាក់ស្វ៊ែជុំវិញ តែ វានៅតែមិនអាចបង្កើតបានជាកោសិកាវ៉ូរ៉ូណយដែលមានមាឌដូចគ្នាដដែល។ តម្រៀបដែលមានមាឌអប្បបរមា គឺស្វ៊ែទាំង 12 ត្រូវដាក់ នៅកំពូល នៃទ្វាទសមុខ(ដូចរូបភាពទី 6)។ ការប្រមាណបានធ្វើឡើងដោយ ហ្វីចេទុត នៅឆ្នាំ១៩៥០ ហើយបានបកស្រាយដោយនិស្សិតគ្មានសញ្ញាប័ត្រម្នាក់ ឈ្មោះ ស៊ាន ម៉ាក់ឡាហ្វលីង នៅឆ្នាំ ១៩៩៩។



(a) A dodecahedron (b) A rhombic dodecahedron

រូបភាពទី 6

បន្ទាប់មក កោសិកា វ៉ូរ៉ូណយនៃស្វ៊ែរបស់យើង គឺគឺជាការស្រោបវាជុំវិញដោយ ស្វ៊ែ តាមទម្រង់ទ្វាទសមុខ។ វាមានលទ្ធភាពគណនាពីដង់ស៊ីតេក្នុង កោសិកាវ៉ូរ៉ូណយ។ ដង់ស៊ីតេវាទាបជាងតម្រៀបផ្លែក្រូចនៅតាមទីផ្សារ។

តើយើងទទួលបានលទ្ធផលប្រសើរជាងមុនមែនទេ? "ទេ"

ព្រោះថា យើង មិនអាចបំពេញលំហ ដោយ ការគ្មានត្រួតគ្នារបស់ទ្វាទសមុខទេ។ យើងចាំបាច់ដើម្បីត្រូវបំបាត់ លំហនោះ។ ដូច្នេះយើង ឃើញថា ករណីវិមាត្របី មានការលំបាកច្រើនជាងករណីវិមាត្រពីរ ព្រោះចម្លើយបរមា មិនមានលក្ខណៈទូទៅសោះ។

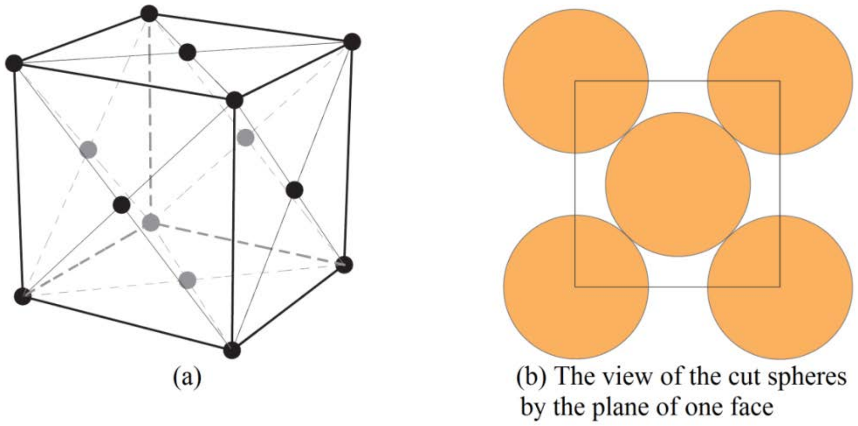
ដើម្បីរកចម្លើយបរមា យើងនឹងសិក្សាពេលបន្ទាប់ទៀតនេះ នូវករណីដែល ចំណុចកណ្តាលរបស់ស្វ៊ែ ដាក់តាមទ្រង់ទ្រាយ face-centered cubic lattice ។ កោសិកាវ៉ូរ៉ូណយ ក្នុងពេលនេះ គឺត្រូវគ្នានឹង ទ្វាទសចតុមុខ (ទ្វាទសមុខដែលមានមុខជាចតុកោណ) (មើលរូបភាពទី6 (b))។

ទ្វាទសចតុមុខ អាចបន្ទុបនៅក្នុងលំហ ហើយការបន្ទុបបែបនេះ មានប្រើនៅក្នុងគ្រីស្តាល់វិទ្យា។

ការបកស្រាយបរមាកម្មនៃបណ្តុំផ្លែក្រូច ទទួលបានលទ្ធផលដោយ ថូម៉ាស់ ហេលស៍ (Thomas Hales) និងនិស្សិតរបស់គាត់ ឈ្មោះសាមុយអែល ហ្វែហ្គូសុន (Samuel Ferguson) ក្នុងឆ្នាំ1998 (បំណកស្រាយពេញ បោះផ្សាយនៅ ឆ្នាំ 2006)។ បំណកស្រាយនោះ គឺប្រើកុំព្យូទ័រជាជំនួយ ជាការចំណាយកម្លាំងដ៏ខ្លាំង។ ដោយយើងមិនអាចប្រើដំណោះស្រាយគ្រាប់តាមករណីវិមាត្រពីរបាន បំណងយើងនៅដដែល គឺបន្ថយចន្លោះ រវាងគ្នា តាមវិធីតម្រៀបជាច្រើនរាប់មិនអស់ ហើយគណនាដង់ស៊ីតេវា។ កម្មវិធីនោះ មានដាក់នៅលើវិប សម្រាប់អ្នកចង់សិក្សា ឬផែកមើល។

៣.២ ករណីមាត្រសាស្ត្រនៃការខ្ចប់ណែន

ចូរស្រមៃពី ការបន្ទុបក្នុងលំហានូវគូបជាច្រើន។ ឥឡូវសម្រាប់គូបនីមួយៗ យើងដាក់ស្វ៊ែមួយចំកណ្តាល ហើយស្វ៊ែមួយនៅរាល់កំពូលនៃគូប (ដូចក្នុងរូបភាពទី7)



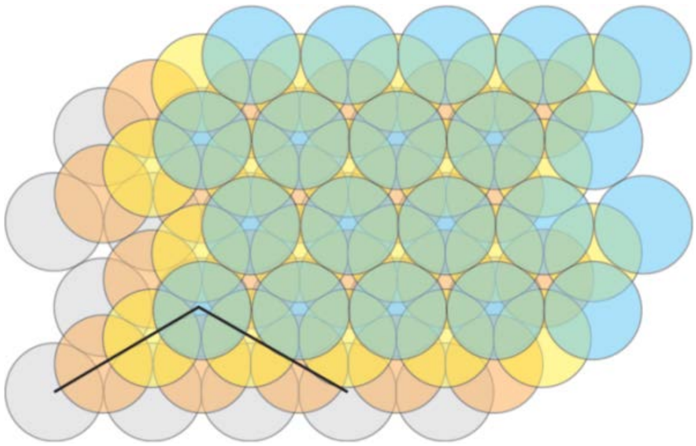
រូបភាពទី7៖ ផ្ចិតនៃស្វ៊ែ សម្រាប់ករណីនៃ face-centered cubic lattice

យើងយកកាំស្វ៊ែឱ្យធំតាមដែលអាចធ្វើបានតែមិនឱ្យវាត្រួតគ្នា។ បើ a គឺជាប្រវែងទ្រនុងរបស់គូប នោះរូបភាពទី7(b) វាច្បាស់ណាស់ថាកាំរបស់បាល់ត្រូវតែ $r = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ ។ ពី នោះមក យើងអាចគណនាដង់ស៊ីតេនៃការខ្ចប់។ ពិតណាស់សម្រាប់ស្វ៊ែមានផ្ចិតស្ថិតនៅកំពូលនៃគូប មានមាឌ១/៨។ ដោយកំពូលគូបមាន៨ ដូចនេះវាត្រូវនិងមាឌ ស្វ៊ែមួយ។ រៀងរាល់ស្វ៊ែដែលនៅកណ្តាលមុខនិមួយៗ មានមាឌពាក់កណ្តាលរបស់វា ស្ថិតនៅក្នុងគូប។ ដោយគូបមានមុខ 6 ដូចនេះវាបានបន្ថែមនូវមាឌស្វ៊ែបីទៀត។ ដូច្នេះ ដង់ស៊ីតេគឺជាផលធៀបមាឌស្វ៊ែបួន លើមាឌគូប។ មាឌស្វ៊ែនីមួយៗ គឺ $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$ ហើយមាឌគូប $V_2 = a^3 = 16\sqrt{2}r^3$ ដូច្នេះ ដង់ស៊ីតេគឺ

$$\rho_3 = \frac{4V_1}{v_2} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.7405$$

តើការខ្ចប់បែបនេះបានលទ្ធផលយ៉ាងណា? ដូចករណីរៀបក្រូច យើងស្រទាប់ក្រូចទីមួយ ដូចរូបភាពទី 2 (b)។ ខាងលើមួយស្រទាប់ទៀត យើងខិតរំកិលបន្តិចតាមទិសមួយដូចគ្នា ជាឧទាហរណ៍ទៅស្តាំខាងលើ។ ស្រទា ប់ទី 3 ក៏រក្សានូវទិសដៅនេះទៀត។ល។ លេចឡើងនូវ សំនួរមួយ។ តើយើងអាច ប្តូរទិសដៅនេះ ហើយរក្សានូវតម្លៃដង់ស៊ីតេដដែលឬទេ? ចម្លើយ គឺបាន ។ ប៉ុន្តែ រាងសម្រេច មិនមែនជា cubic face-centered lattice ទេ។ មានន័យថាតម្រៀបស្វ៊ែដែលមានដង់ស៊ីតេអតិបរមា មិនមែនមានតែមួយនោះទេ។

វាមិនជាក់ស្តែងទេថា តម្រៀប ផ្លែក្រូចធម្មតាមិនប្រាកដជាមានរាង cubic face-centered lattice ។ ពិតណាស់ បើមើលរូបភាពទី7(b) យើងឃើញថា យើងត្រូវមានបន្ទាត់មួយដែលកាត់ផ្ចិតនៃស្វ៊ែ។ វាជាលំហាត់ល្អមួយ នៃការមើលឃើញដោយស្រមៃ រូបភាពនៃបន្ទាត់ទាំងនោះក្នុងតម្រៀប ផ្លែក្រូចធម្មតា ដែលគ្មានមួយណា នៅ ក្នុងប្លង់ដេកទេ។ ពិតណាស់ ប្លង់ ក្នុងរូបភាពទី 2 (b) គឺជាប្លង់ទ្រេតមួយ កាត់ចំណុចកណ្តាលនៃមុខទាំងបីត្រូវគ្នានៃកំពូលគូប (រូបភាពទី 7 (a)។ ក្នុងរូបភាពទី 8 យើងបង្ហាញសញ្ញាណនៃតម្រៀបបួនស្រទាប់ ដូចនៅក្នុងរូបភាពទី 2 (b) ពីមួយស្រទាប់ទៅមួយស្រទាប់។ ផ្សេងទៀត បន្ទាត់ពីរកាត់ផ្ចិតនៃស្វ៊ែកែងគ្នា។



រូបភាពទី8 ៖ ស្វ៊ែបួនស្រទាប់តម្រៀបតាមទម្រង់រូបភាពទី២ (b) នឹងបន្ទាត់កែងកាត់តាមផ្ចិត

៤. លំហាវីងមេយ

៤.១ ការអនុវត្តន៍នៅក្នុងគ្រីស្តាល់វិទ្យា

សំនួរពីដង់ស៊ីតេនៃការខ្ចប់ស្វ៊ែ ត្រូវបានសួរទៅ ចូហាន់ កេភ្លឺ (Johannes Kepler) ដោយ ថូម៉ាស់ ហារ៉ុត (Thomas Harriot) នៅចុងសតវត្សទី 16។ នោះពេលនោះ ហារ៉ុត ជឿពីអត្ថិភាពរបស់អាតូម ហើយចង់ដឹងថាតើ វាតម្រៀបលើគ្នាបែបណា។ បើតម្រៀប អាតូម ក្នុងរូបធាតុសាមញ្ញ នោះ គីមីវិ ទូពោលថា ជារូបធាតុគ្រីស្តាល់។ រូបធាតុធ្ងន់ដូចជាលោហ: ភាគច្រើនមានបន្តុបអាតូម តាមទម្រង់ face centered cubic lattice ។ រូបធាតុដែលស្រាលក៏មានការបន្តុបសាមញ្ញជាងដែរ។ ករណីនេះ គឺបន្តុបអាតូម មានដាក់តែចំកំពូលគូបតែប៉ុណ្ណោះ។ មានធាតុគីមីតែមួយគត់ដែលមានតម្រៀបអាតូមតាមទម្រង់បែបនេះ គឺជាធាតុវិទ្យុសកម្ម ដែលមានឈ្មោះថា ប៉ូឡូនីញ៉ូម (polonium) (លម្អិតសូមមើល [4])។

៤.២ ការខ្ចប់ដោយចៃដន្យ

ប្រសិនបើយើងតម្រៀបផ្លែក្រូចដោយប្រើគម្រូ face-centered cubic lattice ដូចបានបង្ហាញខាងលើ នោះយើង បានដង់ស៊ីតេ $\rho_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.7405$ ។ តែ បើសិនជាយើងប្រញាប់ ហើយបោះក្រូចចូលក្នុងប្រអប់យ៉ាងលឿន តើយើងទទួល

បានដង់ស៊ីតេប៉ុនណា? នេះគេហៅថាការខ្ចប់ដោយចៃដន្យ (Random Packing) ជាការពិត ដង់ស៊ីតេនិង មិនដូចគ្នារាល់លើកទេ។ ពិត ណាស់ បើយើងក្រឡុកប្រអប់ យើង នឹងបានដង់ស៊ីតេធំជាងមុន។ ប៉ុន្តែ តើវា មានន័យថាម៉េច? ការពិសោធន៍បង្ហាញថា ដង់ស៊ីតេប្រែប្រួលក្នុងកម្រិតពី 55% (ការខ្ចប់ ដែលប្រហោង) ដល់អតិបរមា 63.4% (ការខ្ចប់ដែលណែន)។ តម្លៃប្រែប្រួលនេះ បានរៀបរាប់ក្នុង អត្ថបទស្តីពីធម្មជាតិ ក្នុងឆ្នាំ 2008 ដោយ សុង ប៉ាង និង ម៉េស (Song, Wang and Maske) [3]។

៤.៣ ការខ្ចប់វត្ថុផ្សេងទៀតខុសពីស្វៃ

វាអាចទទួលបានដង់ស៊ីតេធំជាង ρ_3 ប្រសិនបើយើងប្តូររាងនៃវត្ថុដុំដូចៗគ្នារបស់យើងពីស្វៃទៅជារាងផ្សេង ជាឧទាហរណ៍អេលីបសូអីដ។ អត្ថបទ [1] បង្ហាញថា ដង់ស៊ីតេនៃ ការខ្ចប់ណែនចៃដន្យ នៃវត្ថុពពួករាងស្វៃដែលមានទ្រង់ទ្រាយ ប្រហែលស្ករគ្រាប់ M & M អាចស្ថិតក្នុងចន្លោះ ពី 0.68 ទៅ 0.71 ហើយដង់ស៊ីតេនៃវត្ថុពពួករាងអេលីបសូអីដ ស្វៃកម្រាស់អេលីប មានប្រហែល 0.74។ ដង់ស៊ីតេនៃការខ្ចប់ដោយចៃដន្យ មានសារៈសំខាន់សម្រាប់ឧស្សាហាកម្ម ពេលដែលការវេចខ្ចប់ធ្វើដោយ ស្វ័យប្រវត្តិ។ ជាពិសេស ដង់ស៊ីតេអាច ប្រែប្រួល ក្នុងពេលដឹកជញ្ជូន។

៤.៤ បន្តិចបន្តួចពីវិមាត្រធំ

នៅក្នុងវិមាត្រខ្ពស់ ការខ្ចប់ដ៏ណែននៃអ៊ីពែស្វៃ ត្រូវបានគេស្គាល់ជាដល់វិមាត្រ 8 ហើយមាន ការបកស្រាយតិចតួចពីតម្រៀបមិនធម្មតា។

ការអនុវត្តន៍មួយនៃការខ្ចប់ស្វៃ ក្នុងវិមាត្រខ្ពស់ គឺជាការបង្កើត នូវ កូដ កែតម្រូវ។ គោលការណ៍នៃការកែតម្រូវលេខកូដខុស គឺជាបម្លែងកូដ នៃពាក្យឬ កម្រងសញ្ញា ដែលហៅថា ពាក្យកូដ (Code Words) ដែលខុសគ្នាពីមួយទៅមួយ ក្នុងចន្លោះ $2r$ នៃសញ្ញា។ ដូចនេះ បើសិនជាមានកំហុស ត្រង់ចំណុចតូ ចជាង r ក្នុងពេលបញ្ជូន នោះមានពាក្យកូដមួយយ៉ាងតិចក្នុងចម្ងាយតិចជាង r ចាប់ពីពេលទទួលមក ហើយ ការកែតម្រូវគឺអាចធ្វើទៅបាន។ ក្នុងការកែតម្រូវលេខកូដ ដោយប្រើការខ្ចប់ស្វៃ យើង បំផ្លែងអក្សរនៃកូដ ទៅជាបញ្ជីធាតុលំដាប់ ពីកូអរដោណេ នៃផ្ចិត នៃស្វៃមិនត្រួតគ្នា។ ប្រសិនបើស្វៃមានកាំ r នោះការកែតម្រូវអាចតិចជាង r ។

៤.៥ សំនួរបន្ទាប់...

គឺដល់វេនដែលអ្នកត្រូវសួរម្តង។ ដូចដែលអ្នកធ្លាប់បានឃើញ មានបញ្ហាដ៏សាមញ្ញជាច្រើន ប្រកបដោយ ការអនុវត្តដ៏ទូលំទូលាយ មានចម្លើយយ៉ាងត្រឹមត្រូវបោះពុម្ពនៅក្នុងទស្សនាវដ្តី វិទ្យាសាស្ត្រ ដូចជា ធម្មជាតិ វិទ្យាសាស្ត្រ និង វិភាគគណិតវិទ្យា ជាដើម។

៥. សុពលភាពនៃបំណាកស្រាយដោយប្រើកុំព្យូទ័រ

បំណាកស្រាយដង់ស៊ីតេ របស់ថាសក្នុងករណីវិមាត្រ 2 គឺ $\rho_2 = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ បង្ហាញថា មានការលំបាករក ដំណោះស្រាយពេលដែលមានករណីជាច្រើនត្រូវវិភាគ។ ថ្វីត្បិតតែយ៉ាងនេះក្តី ក៏អ្នកអាចនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់បាន។ ប៉ុន្តែតើអ្នកណាអាចផ្ទៀងផ្ទាត់បានថា $\rho_3 = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$? វាទាមទារការវិភាគបកស្រាយ ចំនួន 5000 ករណី ហើយករណីនីមួយៗ សែនស្មុគស្មាញ ទើបត្រូវការគណនាដោយម៉ាស៊ីនកុំព្យូទ័រ ដែលមានកូដកម្មវិធីដល់ទៅ3 ជីកាបៃត៍។ ជាការពិតណាស់ កូដកម្មវិធីបង្ហាញជាសាធារណៈ ប៉ុន្តែ អ្នកបង្កើតវាបានចំណាយពេលជាច្រើនឆ្នាំ ដើម្បីផលិត។ ដូច្នេះតើអ្នកណា ដែលមានទាំងពេលវេលានិងជំនាញដើម្បីពិនិត្យជាលម្អិត? សម្រាប់ការផ្ទៀងផ្ទាត់ គឺមានយុទ្ធសាស្ត្រ ដើម្បីបង្រួម ឲ្យមានកំហុសតិចតួចបំផុត ហើយ ហេលស៍ និង សូឡូម៉ន (Hales and Solomon) បានប្រើវា។ ជាឧទាហរណ៍ គេទាំងពីរ បានសរសេរកម្មវិធី ដាច់ដោយឡែកពីគ្នា

និងស្របគ្នា។ កម្មវិធីអាចដំណើរការលើ កុំព្យូទ័រផ្សេង ប្រកបដោយកុំផាយលី និងប្រូសេស៊័រ ផ្សេងៗ។ ប្រូក្រាមរងអាចប្រើពីកញ្ចប់កម្មវិធី ដែលគេធ្លាប់ប្រើប្រាស់យូរឆ្នាំមកហើយ។ល។

ទោះជាយ៉ាងណា បំណាក ស្រាយបែបនេះ ទាមទារការត្រួតពិនិត្យហ្មត់ចត់ ហើយទាមទារពេលវេលាយូរដើម្បីឱ្យសហាគមន៍អ្នកគណិតវិទូ អាចទទួលយកបាន ។ ក្នុងករណីការប្រមាណរបស់ កេភ្លឺ បំណាក ស្រាយសម្រេចទើបមានក្នុងឆ្នាំ 2005 តាមកា រវិភាគនៃគណិតវិទ្យា ក្នុងទស្សនាវដ្តីគណិតវិទ្យាដ៏ល្បី បំផុត។ ប៉ុន្តែសហាគមគណិតវិទូ នៅតែព្យាយាមរាវរកបំណាកស្រាយផ្សេង តាមបែបគណិតវិទ្យា។ ស្របជាមួយគ្នានេះ គណិតវិទូ និងអ្នកស្រាវជ្រាវទ្រឹស្តីកុំព្យូទ័រ នៅខំស្វែងរករូបមន្តបំណាក ស្រាយ គឺបំណាកស្រាយ ដែល ជំហាននីមួយៗ អាចពិនិត្យដោយកុំព្យូទ័រ។ ឧទាហរណ៍ គោលបំណងនៃគម្រោង Flyspeck គឺដើម្បីបង្កើតរូបមន្តបំណាកស្រាយនៃការប្រមាណ កេភ្លឺ។ http://code.google.com/p/flyspeck/wiki/FlyspeckFactSheet

ជោគជ័យដំបូង ដែលបំណាកស្រាយដោយកុំព្យូទ័របានធ្វើឡើង គឺ ទ្រឹស្តីបទពណ៌បួន ដែលពោលថា គេអាចប្រើពណ៌តែបួនគត់ ដើម្បីផាត់ពណ៌ផែនទីពិភពលោក ដោយមិនមានឱ្យពណ៌ផ្នែកពីរជាប់គ្នាដូចគ្នាបាន។ ទ្រឹស្តីបទនេះ ត្រូវបានលើកឡើងនៅឆ្នាំ ១៩៧៦ ដោយ ខេនណែត អាប់ភល និង វ៉ុលហ្គេន ហាគេន។ កាលណោះ អ្នកគណិតវិទូ មិនទាន់ទទួលស្គាល់ការបកស្រាយតាមបែបកុំព្យូទ័រគណនានៅឡើយទេ។ ពេលវេលាបានផ្លាស់ប្តូរ ហើយកុំព្យូទ័របានធ្វើបដិវត្តក្នុងការអនុវត្តគណិតវិទ្យា។

ឯកសារយោង

[1] A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Tarquato and P.M. Chikin, Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids, Science, 303 (2004), 990–993.

[2] T. Hales, Cannonballs and honeycombs, Notices of the American Mathematical Society, 47 (2000), 440–449.

[3] C. Song, P. Wang and H.A. Maske, A phase diagram for jammed matter, Nature, 453 (2008), 629–-632.

[4] G.C. Szpiro, Kepler's conjecture, John Wiley & Sons, Inc., 2003.