អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី Klein Project Blog

មីក្រូទស្សន៍ បាណាច ក្នុងការស្វែងរកចំណុចនឹងមួយ

រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ: Christiane Rousseau

ក្នុងអត្ថបទខ្លីនេះ យើងនឹងបង្ហាញពីការចាប់ផ្តើមពីល្បែងមួយដ៏តូច រកឱ្យឃើញទ្រឹស្តីមួយ ក្នុងចំណោមទ្រឹស្តីដែលសំខាន់ជាងគេនៃគណិតវិទ្យាដែលមានឈ្មោះថា"ទ្រឹស្តីបទបាណាច (Banach) នៃចំណុចនឹង។ ទ្រឹស្តីបទនេះមានការអនុវត្តដ៏អស្ចារ្យទាំងក្នុង និងក្រៅគណិតវិទ្យា។ ក្នុងចំណុចទី៣ យើងនឹងនិយាយអំពី ការអនុវត្តមួយដ៏គួរឱ្យទាក់ទាញក្នុងការពង្រួមរូបភាព។

ប៉ុន្តែចូរផ្តោតអារម្មណ៍ទៅលើល្បែងរបស់យើងសិន ដោយមើលទៅគម្របនៃប្រអប់មួយដ៏ល្បីល្បាញគឺរូបគោសើច។

នៅក្រវិលខាងស្តាំ ក៏ជារូបគោសើចដែរ។ ចំពោះគ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៅលើគម្រប គឺត្រូវគ្នាទៅនឹងរូបនៅក្រវិលខាងស្តាំ។ នេះគឺជាអនុគមន៍ពីគម្របទៅខ្លួនវា ដែលយើងនឹងហៅវាថាF ។ តួយ៉ាង ដូចជាចុងចង្ការរបស់គោធំ ត្រូវគ្នាទៅនឹងចុងចង្ការរបស់គោតូចនៅក្រវិលខាងស្តាំ។ ចំណុចកណ្តាលនៃភ្នែកគោ ត្រូវគ្នានឹងចំណុចកណ្តាលនៃភ្នែកគោក្នុងក្រវិលជាដើម។ ពេលនេះយើងមានសំនួរតូចមួយគឺ : ***តើមានចំណុចណាដែលត្រូវបានបញ្ជូនទៅខ្លួនវាវិញ តាមលំនាំខាងលើឬទេ?*** នៅត្រង់នេះ បើមានចំណុចនោះ យើងនឹងហៅចំណុចនោះថា ***ចំណុចនឹង*** ។ បើមាន ចំណុចនឹងមែន វាមិនគួរជាចំណុចដែលយើងបានរៀបរាប់រួចមកនោះទេ គឺបើមានមែនវាគួរតែស្ថិតនៅក្នុងក្រវិលខាងស្តាំ។ ប៉ុន្តែរូបក្រវិលខាងស្តាំនេះត្រូវបានបញ្ជូនទៅក្រវិលខាងស្តាំនៃរូបគោតូចមួយជាន់ទៀត។ល។ យើងឃើញថា រូបភាពទាំងមូលនៅត្រចៀកខាងស្តាំ ហាក់ដូចជារួមទៅចំណុចមួយ ដែលយើងតាងដោយ A ហើយ A ជាគោលដៅនៃសម្រាយបញ្ជាក់របស់យើង។

ឥឡូវ ចូរយើងចាប់ផ្តើមជាមួយចំណុចណាមួយ ឧទាហរណ៍ថា នៅចុងចង្កាគេតាង P_0។ បន្ទាប់មក P_0 បញ្ជូនរូបភាពទៅ $P_1= F(P_0)$ ដែលជាចុងចង្កានៃរូបគោតូចនៅក្រវិលស្តាំរបស់គោ។ តមកទៀត P_1 បញ្ជូនរូបភាពទៅឱ្យ P_2 ដែល $P_2= F(P_1)$ ជាចុងចង្កានៃរូបគោក្នុងក្រវិលស្តាំនៃគោតូចហើយធ្វើដូចនេះជាបន្តបន្ទាប់។ យើងកត់សម្គាល់ឃើញវត្ថុបី៖

1. យើងអាចនឹងបន្តការសង្កេតរហូតដល់ចំនួនមិនកំណត់មួយដែលបង្កើតបានជាស្វ៊ីត$\{P_n\}$ ដែល $P_{+1}= F(P_n)$
2. យើងសង្កេតឃើញថា ដល់ចំនួនកំណត់ណាមួយនៃស្វ៊ីតប៉ុណ្ណោះដែលអាចសម្គាល់បាន រីឯចំណុចដទៃបន្តទៀតមិនអាចមើលឃើញនោះទេ។ ជាការពិតណាស់ ពេលយើងពង្រីករូបភាព នោះយើងអាចឃើញរូបគោ បានប៉ុន្មានដំណាទៀត។ ប៉ុន្តែ ទោះជាយើងខំប្រើឧបករណ៍ពង្រីកយ៉ាងណាក៏ដោយ ក៏យើងអាចមើលឃើញរូបគោនោះបានត្រឹមតែចំនួនកំណត់ណាមួយប៉ុណ្ណោះ ហើយយើងនៅតែមិនអាចមើលឃើញចំណុចបន្តបន្ទាប់ទៀតដដែល។
3. ស្វ៊ីតនេះហាក់ដូចជារួមទៅរកចំណុចA ដូចពីមុនអញ្ចឹង។

បើជ្រើសរើសចំណុច Q_0 ណាមួយផ្សេងទៀត ហើយបង្កើតស្វ៊ីត $\{Q_n\}$ ដែល $Q_n=F(Q_n)$។ យើងនឹងបានឃើញថាស្វ៊ីត $\{Q_n\}$ នឹងរួមទៅរកចំណុច A តែមួយ។ ជាការពិតណាស់ យើងកត់សម្គាល់ឃើញថា តាមលំនាំបន្តបន្ទាប់ទៀតពិតជាមានចំណុច A តែមួយគត់ដែលជាចំណុចប្រសព្វនៃបណ្តុំរូបភាពដែលនៅក្រវិលខាងស្តាំ ពេលវិមាត្រខិតទៅរក0។

តើទ្រឹស្តីបទបាណាចនៃចំណុចនឹង ប្រាប់យើងពីអ្វីខ្លះ? វានឹងប្រាប់យើងថា តាមពិតអនុគមន៍ F មានចំណុចនឹងតែមួយគត់ បានន័យថាមានចំណុច A តែមួយគត់នៃប្លង់ដែល $F(A)=A$។ លើសពីនេះទៅទៀត ក៏អាចអះអាងផងដែរថា ពីចំណុច P_0 ណាមួយក៏ដោយ យើងបង្កើតស្វ៊ីត$\{P_n\}$ ដែល $P_{n+1}=F(P_n)$ នោះស្វ៊ីតនឹងរួមទៅរក A។

តើមកពីអ្វី? តើវាត្រូវសម្រាប់អនុគមន៍ F ដទៃទៀតឬទេ? គឺមិនមែនទេ។ ជាឧទាហរណ៍ បើបម្លែងកិលនៅលើប្លង់គ្មានចំណុចនឹងទេ ហើយអនុវត្តន៍របស់ $G(x,y)=(x+(x^2-1),y)$ មានចំណុចនឹងពីរ $(\pm 1,0)$។ អនុវត្តន៍ F នៃល្បែងរបស់យើងមានលក្ខណៈពិសេស។ វាគឺជាដំណើររួមតូច។ ពិតណាស់ រូបភាព វារួមតូចជាងដែនកំណត់។ បើពីរចំណុច P និង Q នៅឃ្លាតពីគ្នា នោះរូបភាពរបស់វាគឺ $F(P)$ និង $F(Q)$ ខិតកាន់តែជិតជាងគ្នាជាងចំណុច P និង Q។ សំណើនេះពិតជាត្រឹមត្រូវតែតខ្វោះ ព្រោះក្នុង $\mathbb{R}^2$ យើងអាចវាស់ចម្ងាយរវាងពីរចំណុចផ្សេងគ្នាបាន ព្រោះថា $\mathbb{R}^2$ ជាលំហមេទ្រិក។ លក្ខណៈរបស់ F វាជាដំណើររួមតូច ពេលដែលយើងបង្កើតស្វីត $\{P_n\}$ នោះទោះជាពីចំណុចចាប់ផ្តើមជាក់លាក់ណាមួយក៏ដោយ (ទោះជាមើល ពីជិតឬឆ្ងាយ តាមរយៈមីក្រូទស្សន៍ធម្មតាឬតាមមីក្រូទស្សន៍អេឡិកត្រូនិកក៏ដោយ) ក៏ក្រោយពីជំហានទី N ណាមួយដែលអាស្រ័យទៅនឹង ចំណុចចាប់ផ្តើម នោះគ្រប់ធាតុ P_n, $n>N$ នៃស្វីត មិនអាចមើលឃើញ ឬបែងចែងឱ្យដាច់ពីគ្នាបាន។ យើងនឹងហៅវានៅចំណុចក្រោយស្វីតដែលមានលក្ខណៈបែបនេះថាជា ស្វីតកូស៊ី។ ក្នុង $\mathbb{R}^2$ គ្រប់ស្វីតកូស៊ីមានលីមីត។ យើងហៅ $\mathbb{R}^2$ ជាលំហមេទ្រិកពេញលេញ។

១. ទ្រឹស្តីបទ បាណាច នៃចំណុចនឹង

ពេលនេះ យើងមានគ្រប់គ្រាន់នូវគ្រឿងផ្សំសម្រាប់ករណីទូទៅ ហើយយើងអាចបង្កើតនូវទ្រឹស្តីមួយ។

ទ្រឹស្តីបទ (ទ្រឹស្តីបទ បាណាច នៃចំណុចនឹង) តាង K ជាលំហមេទ្រិកពេញលេញ ដែលចម្ងាយរវាងពីរចំណុច P និង Q កំណត់ដោយ $d(P,Q)$។ តាង $F:K\to K$ ជាដំណើររួម មានន័យថាមាន $c\in(0,1)$ ដែលចំពោះគ្រប់ $P,Q\in K$ គេបាន $d(F(P),F(Q))\le cd(P,Q)$។ ក្នុងករនីនេះ F មាន ចំណុចនឹងតែមួយគត់គឺ $A\in K$ ដែល $F(A)=A$។

យើងនឹងរៀបរាប់លំអិតពីអំណះអំណាងនេះ។ ផ្នែកនេះគ្រាន់តែជាសម្រាយបំភ្លឺទូទៅ ដែលអ្នកអាចរំលងចោលបាន បើអ្នកចង់ដឹងតែពីការអនុវត្តន៍បន្តនោះ។

យើងបានដឹងហើយថា ចម្ងាយរវាងចំណុចP និង Q គឺនៅក្នុង $\mathbb{R}^2$។ តើយើងបង្កើតសំណុំ K ដោយរបៀបណា?

និយមន័យ ចម្ងាយនៅលើសំណុំ K គឺជាអនុគមន៍កំណត់ដោយ $d:\mathcal{K}\times\mathcal{K}\to\mathbb{R}$ ដែល

1. ចំពោះគ្រប់ $P,Q\in K, d(P,Q)\ge 0$
2. $d(P,Q)=0$ ចាំបាច់និងគ្រប់គ្រាន់ឱ្យ$P=Q$
3. ចំពោះគ្រប់ $P,Q,R\in K, d(P,Q)\le d(P,R)+d(R,Q)$ (វិសមភាពត្រីកោណ)

យើងស្គាល់លក្ខណៈទាំងនេះដែលបានបញ្ជាក់ច្បាស់នូវចម្ងាយអឺគ្លីដក្នុង $\mathbb{R}^2$។

ឥឡូវយើងប្រើឡើងវិញនូវនិយមន័យនៃស្វីតកូស៊ី ដែលកំណត់ដោយបញ្ញត្តិនៃស្វីត ដូចដែលបានរៀបរាប់ពីខាងដើម គឺមិនថាចាប់ពីកម្រិតល្អៀងបែបណាក៏ដោយ ក៏ ក្រោយពីចំនួនកំណត់ណាមួយនៃតួរបស់ស្វីត ធាតុបន្តបន្ទាប់ទៀតនឹងមិនអាចបែងចែកពីគ្នាបានទេ។ យើងហៅវាថា ជាស្វីតរួមតូច។

និយមន័យ

1. ស្វីត (P_n) នៃធាតុ ជាលំហមេទ្រិកK ជាស្វីតកូស៊ីចំពោះ $\forall\varepsilon>0$ មាន $N\in\mathbb{N},\forall n,m>N$ នោះ $d(P_n,A)<\varepsilon$
2. ស្វីត (P_n) នៃធាតុជាលំហមេទ្រិក K រួមទៅរកលីមីត $A\in K$ ដែលចំពោះគ្រប់ $\varepsilon>0$ មាន $N\in$ ដែលគ្រប់ $n>N$ នោះគេបាន $d(P_n,A)<\varepsilon$

និយមន័យ លំហមេទ្រិកK មួយជាលំហមេទ្រិកពេញ បើស្វីតកូស៊ី(P_n) ណាមួយនៃធាតុK រួមទៅរកធាតុAនៃ K។

តើយើងអាចស្រាយនូវទ្រឹស្តីបទចំណុចនឹងបានដោយរបៀបណា? ភាពមានតែមួយគត់នៃចំណុចនឹងជាការងាយ។ ជាការពិតឧបមាថា A និង B ជាចំណុចនឹងពីរ នោះ$F(A)=A$ និង $F(B)=B$។ ជាងនេះទៅទៀត បើ F មានដំណើររួមតូច នោះ

$d\left(F\left(A\right),F\left(B\right)\right)\le cd\left(A,B\right)$

ដូចនេះ $d\left(A,B\right)\le cd\left(A,B\right)$។ ចម្លើយតែមួយគត់គឺ $d\left(A,B\right)=0$ នោះបញ្ជាក់ថា $A=B$។

ដូចដែលមានស្រាប់ គោលការណ៍ជាក់ស្តែងនេះសាមញ្ញណាស់៖ យើងបានរកឃើញវា ចមកហើយ ក្នុងល្បែងរបស់យើងជាមួយរូបគោសើចនោះ។ យើងចាប់យកចំណុច $P_0\in K$ ណាមួយ ហើយយើងបង្កើតស្វ៊ីត $\{P_n\}$ (ដូចពីមុនដែរ) ដែល $P_{n+1} = F(P_n)$. ស្វ៊ីតនោះជាស្វ៊ីតកូស៊ី ហើយលីមីតរបស់វាជាចំណុចនឹង។ (ជាការពិតណាស់ ការបង្ហាញនូវសម្រាយបញ្ជាក់ពីរនេះ ត្រូវ ធ្វើការងារមួយចំនួន ប៉ុន្តែយើងនឹងមិន បកស្រាយនូវបច្ចេកទេសលំអិតនោះទេ។ អ្វីដែលសំខាន់នោះវាជាដំណោះស្រាយដូចគ្នាក្នុងករណីទូទៅនៃលំហមេទ្រិកពេញដ៏ស្មុគស្មាញ ដូចករណីសាមញ្ញ $\mathcal{K}=\mathbb{R}$)។

គំនិតក្នុងការស្រាយបញ្ជាក់ មិនត្រឹមតែសាមញ្ញ និង ប្រកបដោយអព្ភន្ត រញ្ញាណទេ វាថែមទាំងមានភាពអស្ចារ្យជាច្រើនផងដែរ។ វាផ្តល់ឱ្យយើងនូវវិធីដោះស្រាយតាមបែបវិភាគលេខ ក្នុងការបង្កើត ចំណុចនឹង A មួយ។ ការណ៍នេះបានបង្ហាញថា ការអនុវត្តន៍ជាច្រើននៃទ្រឹស្តីបទនេះ អាចនឹងស្រាយបញ្ជាក់បានទាំងផ្នែកទ្រឹស្តីបទ និង ផ្នែកអនុវត្តន៍។

២. ការអនុវត្តន៍ក្នុងការវិភាគ

ការអនុវត្តន៍មួយក្នុងចំណោមការអនុវត្តន៍ទ្រឹស្តីបទ បាណាច នៃចំណុចនឹង គឺជាសម្រាយបញ្ជាក់ពីអត្ថិភាពតែមួយគត់និងគ្រប់គ្រាន់នៃចម្លើយរបស់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។ក្នុងការអនុវត្តន៍នេះ លំហមេទ្រិកពេញ $\mathcal{K}$ គឺជាសំណុំនៃអនុគមន៍ ហើយអនុវត្តន៍ F បំប្លែងអនុគមន៍មួយទៅជាអនុគមន៍ផ្សេងទៀត(យើងតែងតែនិយាយថា F ជាប្រមាណវិធី)។ ល្បិចនោះគឺវិធីបង្ហាញថា ចម្លើយនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល បើសិនជាមាន គឺជាចំណុចនឹងនៃប្រមាណវិធី F។

អ្នកអាចនឹងបានសិក្សានូវសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញៗ ហើយបានរៀនពីល្បិចក្នុងការស្វែងរក រូបមន្តដើម្បីស្រាយរកចម្លើយ។ សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទាំងនោះជាករណីលើកលែង ព្រោះសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលជាច្រើន គ្មានរូបមន្តដើម្បីដោះស្រាយឡើយ។ ដូច្នេះកត្តាសំខាន់នៃ ទ្រឹស្តីបទនេះ ធានាអះអាងពីអត្ថិភាពនៃចម្លើយ។ អ្នកមិនគួរភ្ញាក់ផ្អើលទេ ដែលថាគ្មានរូបមន្ត ក៏អាចផ្តល់ចម្លើយទៅស្ទើរតែគ្រប់សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលទាំងអស់។ ជាការពិត សូម ចាប់អារម្មណ៍នូវសមីការ ឌីផេរ៉ង់ស្យែលសាមញ្ញដូចតទៅ

$$y'=e^{-2x^2}$$

ចម្លើយរបស់វាគឺ $y=\int e^{-x^2}dx$

អ្នកអាចនឹងនឹកឃើញពីមេរៀនប្រូបាប៊ីលីតេ និង ស្ថិតិ បាននិយាយថា គ្មានរូបមន្តណាដែលអាចធ្វើព្រីមីទីវលើអនុគមន៍ e^{-x^2} បានទេ ដូច្នេះហើយបានជាយើងត្រូវដោះស្រាយដោយប្រើតារាងលេខនៅពេលរៀនពីច្បាប់ន័រម៉ាល់

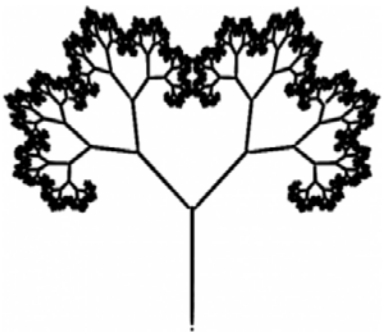
៣. ការអនុវត្តន៍ក្នុងការពង្រួមរូបភាព

វិធីដ៏ល្អបំផុតក្នុងការទុករូបភាពមួយក្នុងអង្គចងចាំ ជាការរក្សាពណ៌នៃភិចសែលនិមួយៗ។ មានបញ្ហាពីរទាក់ទងនឹងវិធីសាស្រ្តនេះ៖

- វាត្រូវការគុណភាពនៃអង្គចងចាំដ៏ធំសម្បើម
- ពេលយើងព្យាយាមពង្រីករូបភាពជា ឧទាហរណ៍ ការពង្រីកដើម្បីដាក់ក្នុងផ្ទាំមធំៗ នោះ ភិចសែល នឹងរីកទៅជាការ៉េធំៗដែរ ហើយយើងនឹងបាត់បង់នូវព័ត៌មានពីពណ៌ពិតប្រាកដនៃការ៉េនីមួយៗ។

តើគន្លឹះជាអាទិភាពនៃការបង្រួមរូបភាពជាអ្វី? គឺជាការកត់ត្រានូវព័ត៌មានតិចជាងរូបភាពដើម តែត្រូវអនុវត្តន៍តាមវិធីដ៏ឆ្លាតវៃជាងនេះ ដើម្បីឱ្យភ្នែកទទេមិនអាចមើលឃើញថារូបភាពនោះព្រាលទេ។

អ៊ិនធឺណែតកាន់តែត្រូវការខ្លាំងនូវការពង្រួមរូបភាពនេះ។ ពិតណាស់ រូបភាពបានពន្លឿតល្បឿនក្នុងការបញ្ជូនទិន្នន័យលើគេហទំព័រ។ ដូច្នេះ ចំពោះល្បឿនរបស់អ៊ិនធឺណែត វា ប្រសើរណាស់ ប្រសិនបើរូបភាពមានទំហំកាន់តែតូច។ នៅពេលអ្នកមើលរូបភាពក្នុងអេក្រង់កុំព្យូទ័ររបស់អ្នកមិនដឹងថា វា មានភាពព្រាលនោះទេ។ ប៉ុន្តែ បើសិនជាអ្នកព្យាយាមពង្រីកវា ឬពង្រីកដើម្បីដាក់ក្នុងផ្ទាំងធំៗ នោះអ្នកនឹងឃើញថា រូបភាពអន់ជាងមុន។



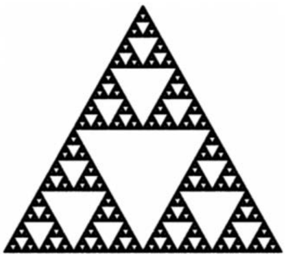
មានគោលការណ៍ពង្រួមរូបភាពជាច្រើន ហើយគោលការណ៍ មួយដែលយើងជួបប្រទះច្រើនជាងគេគឺ JPEG ដែលបានក្លាយជាស្តង់ដានៃរូបភាពឌីជីតាល់។ ការពង្រួមក្នុងទ្រង់ទ្រាយ JPEG ក៏ប្រើវិធីសាស្រ្ត គណិតវិទ្យាដែរ។

ក្នុងអត្ថបទខ្លីនេះ យើងនឹងផ្តោតអារម្មណ៍លើវិធីសាស្រ្តមួយទៀត ដែលមានប្រសិទ្ធិភាពជាង។ វិធីសាស្រ្តនេះ ណែនាំដោយ បានស្លី (Barnsley) ហើយ ត្រូវបានគេហៅថា iterate function systems។ គោលការណ៍គ្រឹះ នៃវិធីសាស្រ្តនេះ គឺប្រហែលរូបភាពមួយទៅនឹងរាងធរណីមាត្រ។ យើងត្រូវរករាងទាំងនោះ ឱ្យច្រើនគ្រប់គ្រាន់ ហើយមិ នកំណត់តែត្រឹមរាងធរណីមាត្រសាមញ្ញ គឺត្រឹមតែ បន្ទាត់និងខ្សែកោងប៉ុណ្ណោះទេ ប៉ុន្តែរាងស្មុគស្មាញផ្សេងទៀត ដូចជា fern (fern ជារុក្ខជាតិដែលមានស្លឹកវែងស្រឡោនគ្មានផ្កាដូចក្នុងរូប)

និងកម្រាលព្រំសៃពីនស្គី(Sierpinski)ជាដើម។

យើងនឹងពន្យល់ ពីគោល ការណ៍នៃដំណើរការពង្រួមរបស់ កម្រាលព្រំសៃពីនស្គី (រូបខាងឆ្វេង)។ មើលពីដំបូងទៅវាដូចជាវត្ថុស្មុគស្មាញ។ តើយើងអាចរក្សាទុកបានយ៉ាងដូចម្តេចក្នុងអង្គចងចាំកុំព្យូទ័រក្នុងរបៀបសន្សំសំចៃ។

របៀបដែលល្អបំផុតគឺរក្សាទុកក្នុងកម្មវិធីមួយ ដើម្បីងាយទាញយកប្រើពេលត្រូវការ។



ដើម្បីរក្សាទុកក្នុងកម្មវិធីនោះយើងត្រូវតែយល់ពីលក្ខណៈរបស់វត្ថុ ក្នុងធរណីមាត្រ។ ចូរសង្កេតមើលកម្រាលព្រំសៃពីនស្គីៈ វា ជាបង្គុំនៃព្រំសៃពីនស្គីបី (មានន័យថាជាការចម្លងព្រំបីពីខ្លួនវា) ដែលមានប្រវែងពាក់កណ្តាលនៃខ្លួនវា (ទាំងកម្ពស់និងប្រវែង)។ តាមពិត ចាប់ផ្តើមពីព្រំ សៃពីនស្គីមួយ យើងអាចកសាងបានព្រំទី២ទៀត ជាមួយ នឹងដំណើរការដូចខាងក្រោមៈ

- យើងពង្រួមព្រំសៃពីនស្គីពាក់កណ្តាលដោយទុកជ្រុងខាងក្រោមខាងឆ្វេង។
- យើងចម្លងវាបានជារូបទីពីរនៃព្រំថ្មីនេះ ហើយបិទវានៅខាងស្តាំ។
- យើងចម្លងបានជារូបទីបី ហើយបិទវានៅខាងលើ។

រូបភាពទីពីរដែលយើងបានសាងឡើង គឺដូចបេះបិទទៅនឹងកម្រាលព្រំសៃពីនស្គីដំបូង ។ ដូចនេះ កម្រាលព្រំសៃពីនស្គីគឺជាចំណុចនឹងក្នុងដំណើរការនេះ។

ឥឡូវបញ្ចូលវាក្នុងគណិតវិទ្យា។ ចូរចងចាំថា ប្រវែង បាតនៃកម្រាលព្រំស្មើនឹងកម្ពស់របស់វា។ ដូច្នេះ យើង យកអ័ក្សចំកំពូលនៅជ្រុងខាងឆ្វេងនៃព្រំសៃពីនស្គី ដូច្នេះ បាតនិងកំពស់មានប្រវែងស្មើ 1។

យើងក៏ទទួលយកផងដែរ នូវការបំប្លែងខាងក្រោម កំណត់ក្នុង $\mathbb{R}^2$

$$T_1(x,y)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right),$$
$$T_2(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\frac{y}{2}\right),$$
$$T_3(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4},\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right).។$$

បើ S ជាកម្រាលព្រំស៊ែពីនស្គី នោះយើងបាន

$S=T_1(S)\bigcup T_2(S)\bigcup T_3(S)$

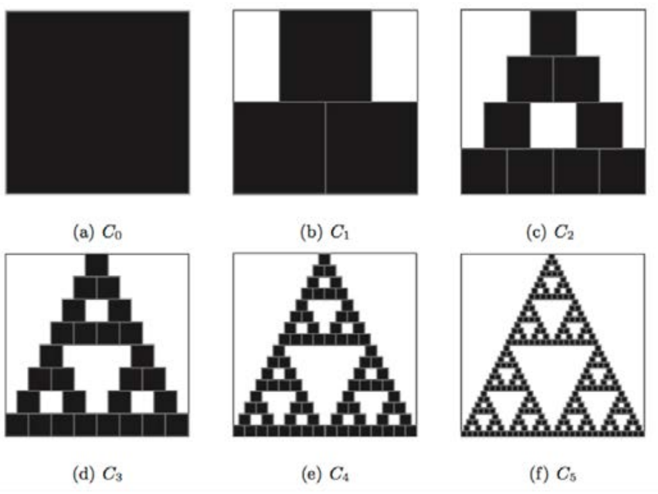
តើមានសំណុំរង B ណាផ្សេងទៀតនៃប្លង់ ដែលមានលក្ខណៈដូចគ្នានេះទេ គឺ

(1) $B=T_1(B)\bigcup T_2(B)\bigcup T_3(B)$?

យើងឃើញថាគ្មានទេ។ ដូចនេះយើងបានបង្ហាញនូវចរិកលក្ខណៈនៃកម្រាលព្រំស៊ែពីនស្គីថាវាជាសំណុំរង B តែមួយគត់នៃប្លង់ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (1)។ តើយើងបានធ្វើអ្វី ? យើងបានសង់អនុគមន៍មួយនៃសំណុំរង B នៃប្លង់ត្រូវគ្នានឹងសំណុំរង $T_1(B)\bigcup T_2(B)\bigcup T_3(B)$។ យើងហៅអនុគមន៍នេះថា W។ វាកំណត់ដោយៈ

(2) $B\to W(B)=T_1(B)\bigcup T_2(B)\bigcup T_3(B),$ ហើយយើងបានសង្កេតថា $S=(W)$ ដែលមានន័យថា S ជាចំណុចនឹងនៃអនុគមន៍នេះ។

យើងបានអះអាងថា កម្រាលព្រំ ស៊ែពីនស្គី គឺជាចំណុចនឹងតែមួយគត់ក្នុងអនុគមន៍នេះ។ ឥឡូវចូរសាកល្បងនឹងការ៉េ C_0 ដូចក្នុងរូប $1(a)$។ រូបភាពរបស់វាគឺ C_1 ក្នុងរូប $1(b)$។ យើងអនុវត្តន៍ដូចគ្នាចំពោះ C_1 និងទទួល C_2,C_3-C_5 (ក្នុងរូបភាពពី $1(c)-(f)$)

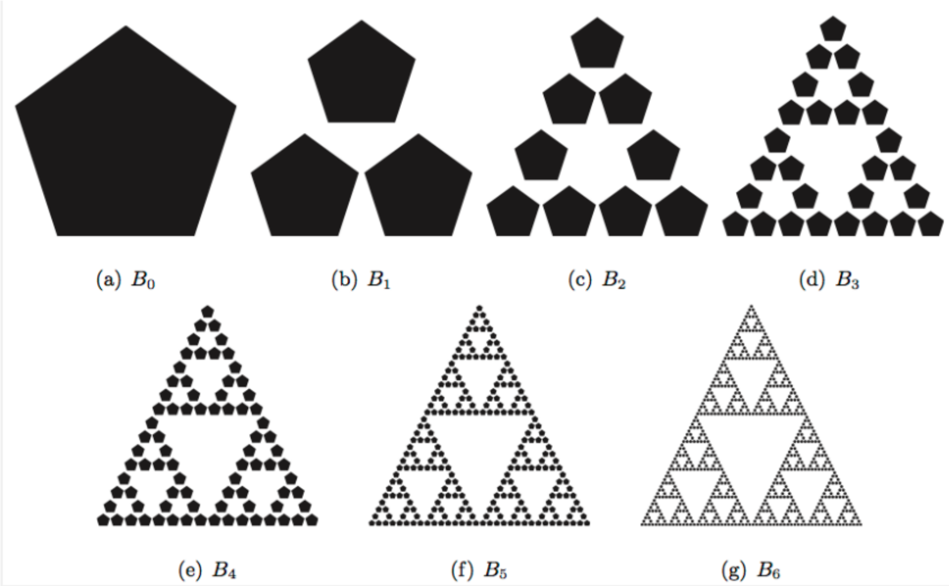


(a) C_0 (b) C_1 (c) C_2 (d) C_3 (e) C_4 (f) C_5

តាមរយៈរូបនេះ យើងសង្កេតឃើញវត្ថុបីយ៉ាងៈ

1. គ្មានសំណុំណាមួយនៃ $C_0,...,C_5$ ជាចំណុចនឹងក្នុងសំណុំ W ទេ ។
2. យើងអាចនឹងបន្តដំណើរការឥតឈប់ឈរហើយផលិតស្វ៊ីតអនន្តនៃសំណុំ $\{C_n\}$ ដែល $C_{n+1}=W(C_n)$។
3. ស្វ៊ីត (C_n) ហាក់ដូចជារួមយ៉ាងលឿនទៅរកកម្រាលព្រំស៊ែពីនស្គី។ ពិត ណាស់ភ្នែករបស់យើងមិនអាចបែងចែកថា C_{10} ខុសពី S ទេ។ ដូចនេះជំនួសឱ្យ S នៅក្នុងរូបភាពរបស់យើង កម្មវិធី នឹងសង់ឡើងវិញនូវ C_{10}។ បើសិនជាចង់បានភាពម៉ដ្ឋជាងមុន យើងអាចនឹងបន្តបន្ថែមឱ្យវាឈប់នៅ C_{20} ឬ C_{30}។ ដូចនេះកម្មវិធីដ៏តូចនេះ អាចបង្កើត S ដល់ភាពម៉ដ្ឋណាមួយក៏បាន។

មិនត្រឹមតែប៉ុណ្ណោះទេ យើងអាចពិសោធន៍ទៀតថា គោលការណ៍អាចដំណើរការបាននឹងសំណុំផ្សេងៗទៀត។ ឧទាហរណ៍ទី២ ចាប់ ផ្ដើមពីបញ្ចកោណក្នុងរូបទី២។ កំណត់សំគាល់ $(i),(ii)$ និង (iii) ខាងលើអនុវត្តន៍ក្នុងឧទាហរណ៍នេះ។



(a) B_0 (b) B_1 (c) B_2 (d) B_3

(e) B_4 (f) B_5 (g) B_6

យើងបានឃើញហើយថា ទ្រឹស្ដីបទ បាណាច នៃចំណុចនឹង អនុវត្តន៍ចំពោះការសង់លើលំហាមេទ្រិកពេញលេញ។ យើងបានកំណត់អនុគមន៍ W ក្នុង (2) លើសំណុំរងនៃទីនោះ។ ចំពោះលំហាមេទ្រិក យើងនឹងរើស យក $\mathcal{K}$ ជាសំណុំ (បិទ) នៃសំណុំរងរួមនៃ ទីនោះ។ យើងនឹង ណែនាំនូវចម្ងាយលើ $\mathcal{K}$ ដែលហៅថាចម្ងាយ ហ៊ាសដុហ្វ (Hausdorff) $d_H(B_1,B_2)$។ និយមន័យនៃចម្ងាយហ៊ាសដុហ្វរវាងសំណុំរងពីរ B_1 និង B_2 គឺជារូបមន្តស្មុគស្មាញ ហើយមិនច្បាស់លាស់ទៀត ដូចនេះយើងនឹងពន្យល់តាមសញ្ញាណក្នុងរបៀបផ្សេងទៀត។ យើងចាប់ផ្ដើមដោយពន្យល់នូវ អត្ថន័យអ្វីដែលយើងចង់ផ្ដល់ឱ្យសំណើនោះ $d_H(B_1,B_2)\le\varepsilon$ (ទោះបីជាយើងមិនបានកំណត់$d_H(B_1,B_2)$ក៏ដោយ) វាមានន័យថា ប្រសិនបើភ្នែករបស់យើងឃើញ ត្រឹមកម្រិត ច្បាស់ ε នោះ គឺយើង មិនអាចបែងចែករវាង B_1 និង B_2 បានទេ។ ក្នុងគណិតវិទ្យា $d_H(B_1,B_2)\le\varepsilon$ មានន័យថា

(3) $\forall P\in B_1\exists B_2 d(P,Q)\le\varepsilon$ និង (3) $\forall P'\in B_2\exists Q'\in B_1\, d(P',Q')\le\varepsilon$។ (d ក្នុងទីនេះ ជាចម្ងាយអឺគ្លីដក្នុង $\mathbb{R}^2$)។ តាមរយៈនេះ គេអាចឱ្យនិយមន័យមិនផ្ទាល់មួយ។

និយមន័យ៖ ចម្ងាយហ៊ាសដុហ្វ រវាងសំណុំទាល់ពីរ B_1 និង B_2 គឺជាអប្បបរមានៃគ្រប់ $\varepsilon\ge 0$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌ(3)។

យើងអាចជឿជាក់ថា អនុគមន៍ W ជាដំណើររួមតូច។ តាមពិត ឧបមាថា $d_H(B_1,B_2)\le\varepsilon$ បន្ទាប់មកយើងអាចបង្ហាញថា $d_H(W(B_1),W(B_2))\le\frac{\varepsilon}{2}$ តាង $P\in W(B_1)$ ។ មាន $i\in\{1,2,3\}$ និង $P_1\in B_1$ ដែល $P=T_i(P_1)$, ដោយ $d_H(B_1,B_2)\le\varepsilon$ នោះមាន $Q_1\in B_2$ ដែល $d(P_1,Q_1)<\epsilon$ ។ តាង $Q=T_i(Q_1)\Rightarrow Q\in W(B_2)$ និង $d(P,Q)=d(T_i(P_1),T_i(Q_1))=\frac{1}{2}d(P_1,Q_1)\le\frac{\epsilon}{2}$។ ដូចគ្នាដែរ បើយើងចាប់ផ្ដើមពី $P'\in W(B_2)$ នោះមាន $Q'\in W(B_1)$ ដែល $d(P',Q')\le\frac{\varepsilon}{2}$។

ដំណើរការនេះ បាន យកទៅប្រើសម្រាប់បង្រួមរូបភាពពិត (មើល $[K]$ ឬ $[RS]$)។ វិធីសាស្ត្រនេះ បង្កើតបានរូបភាពដែលមានគុណភាពខ្ពស់ នៅពេលដែលរូបភាពមានលក្ខណៈ ព្រាលច្រើន។ ទោះជាយ៉ាងណា ក៏ដោយ អត្រានៃការ បង្រួមមិនបានខ្លាំងនិងមិនមានប្រសិទ្ធិភាពដូចទម្រង់ JPEG នោះទេ។ ម៉្យាងទៀត ដំណើរការបង្រួមរបៀបនេះ

(បង្កើតរូបភាពពីប្រូក្រាម) មិនបាន ក្លាយជាចំណាប់អារម្មណ៍សម្រាប់ ការអនុវត្តជាក់ស្តែងនោះទេ ។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ដោយ ភាពងាយៗនៃគោលគំនិតនេះ នៅតែមានលក្ខណៈស្រួចស្រាវដដែល។

៤. ការអនុវត្តន៍ដ៏ភ្ញាក់ផ្អើលៈ វិធានតម្រៀបទំព័រ (PageRank algoritm)

ភាពជោគជ័យរបស់ Google គឺដោយសារម៉ាស៊ីនរុករកតាម វិធានវិធានតម្រៀបទំព័រ (The PageRank algoritm)។ ក្នុងវិធាននេះ គណនានូវចំណុចនឹងនៃប្រមាណវិធីលីនេអ៊ែរលើ $\mathbb{R}^n$ ដែលជាដំណើររួមតូច ហើយចំណុចនឹងនេះ (ដែលជាវ៉ិចទ័រ) ផ្ទៀងផ្ទាត់តាមលំដាប់នៃទំព័រ។ ក្នុងការអនុវត្តន៍ ចំណុចនឹង (ដែលជា eigenvector នៃ eigenvalue 1) ត្រូវបានគណនារកជាតម្លៃប្រហែល P_n សម្រាប់តម្លៃ n ធំគ្រប់គ្រាន់មួយ។ សូមអ្នកអានដែលចាប់អារម្មណ៍ ពិនិត្យសេចក្តីលំអិតក្នុងអត្ថបទខ្លី How Google works? ។

៥. សន្និដ្ឋាន

អ្វីដែលយើងបានដឹងពីអត្ថបទខ្លីនេះ ដែល ចាប់ផ្តើមពីល្បែងធម្មតា យើងស្វែង រកបាននូវគំនិតដែលភ្ជាប់ទៅដំណោះស្រាយគណិតសាស្ត្រនិងបច្ចេកទេស។ យើងស្វែងរកចម្លើយតែមួយគត់សម្រាប់ចំណោទ ដែល ឥឡូវនេះវាក្លាយជាវិធីសាស្ត្រស្តង់ដាក្នុងវិស័យជាច្រើននៃគណិតវិទ្យា ថាតើដំណោះស្រាយនោះជាចម្លើយតែមួយគត់ ហើយជាចំណុចនឹងនៃប្រមាណវិធី ជាពិសេសបានបង្កើតឡើងសម្រាប់គោលគំនិតនោះ។

យើងក៏បានឃើញផងដែរនូវសារប្រយោជន៍នៃទ្រឹស្តីបទដែល បានផ្តល់ការអនុវត្តន៍ដ៏មានប្រសិទ្ធិភាពដើម្បីបង្កើតនូវគម្រូសម្រាយបញ្ជាក់មួយ ជាភាពរួមនៃស៊្វីត នៅពេលដែលវារួមលឿន។

វិភាគគឺជាការសិក្សាលើអនុគមន៍។ អនុគមន៍ជាធម្មតាកំណត់ដោយលេខ។ ក្នុងការគណនាអនុគមន៍ ច្រើនអថេរ យើងបង្កើតនូវសញ្ញាណនៃអនុគមន៍វ៉ិចទ័រ ដែលធាតុក្នុង$\mathbb{R}^n$។ ប៉ុន្តែហេតុអ្វីបានជាយើងឈប់ត្រឹមធាតុនៃ $\mathbb{R}^n$? យើងក៏មានបទពិសោធន៍ផងដែរថា អ្នកគណិតវិទ្យាចូលចិត្តបង្កើតនូវសញ្ញាណនៃអនុគមន៍ ហើយ ទុកលទ្ធភាពឱ្យកំណត់និយមន័យបាន ជាឧទាហរណ៍ សំណុំនៃសំណុំ សំណុំនៃអនុគមន៍ ជាដើម។ ការវិភាគលើសំណុំនៃអនុគមន៍ ឥឡូវនេះក្លាយជាជំពូកដ៏សំខាន់ក្នុងការវិភាគក្នុងសម័យទំនើបនេះ ដែលហៅថា វិភាគអនុគមន៍ (functional analysis) ដែលជាស្តង់ដាសម្រាប់ការសិក្សាថ្នាក់ឧត្តម។

អ្នកត្រូវបានភ្ជាប់ជាមួយនឹងដំណើរការដដែលៗ ដែលអ្នកបានជួប។ ជាឧទារណ៍ វាអាចជាដំណើរការ ដដែលៗក្នុងវិមាត្រ ១ ដែលត្រូវគ្នានឹងស៊្វីតហេរ៉ុង (Heron) ដើម្បីរកឫសការ៉េ។ ភាពរួមដ៏ឆាប់រហ័ សនៃស្វីតធរណីមាត្រ ក៏អាចយល់ផងដែរ ពីការសង្កេតបទបង្ហាញនេះ៕

ឯកសារយោង

[B] M. F. Barnsley, Fractals everywhere, San Diego, Academic Press, 1988.

[K] J. Kominek, Advances in fractal compression for multimedia applications, Multimedia Systems Journal, vol. 5,n 4, 1997, 255–270.

[R] C. Rousseau, Point fixe de Banach (in French), Accromath 5, hiver-printemps 2010 (www.accromath.ca).

[R2] C. Rousseau, How Google works? Klein vignette (www.kleinproject.org).

[RS] C. Rousseau and Y. Saint-Aubin, Mathematics and technology, SUMAT Series, Springer-Verlag, 2008 (A French version of the book, Mathéematiques et technologie, exists, published in the same series.)