អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

ស៊ីតហ្គូដស្ទេន (*Goodstein*) ៖ អំណាចនៃការវិលវល់ជិតអនន្ត

ការសិក្សាពីការវិវត្តន៍នៃបាតុភូតធម្មជាតិ តែងតែនាំយើងឱ្យសិក្សាពីស៊ីតនៃចំនួន ជាពិសេស លក្ខណៈរបស់ វាពេលកើនឡើន និងភាពរួមរបស់វា។ ស៊ីតនៃពហុធា ស៊ីតនៃអនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ស៊ីតនៃអនុគមន៍លោការីតត្រូវបានគេជួបប្រទះជាញឹកញាប់នៅមធ្យមសិក្សា។ ប៉ុន្តែមានស៊ីតដទៃទៀត ដែលនិយមន័យរបស់វាសាមញ្ញ តែបង្កប់នូវលក្ខណៈស្មុគស្មាញជាច្រើន។ ឧទាហរណ៍ស៊ីតរាត់រាយ (chaotic sequence) ដែលមានក្នុងការសិក្សានៃប្រព័ន្ធឌីណាមិច (មើល [1]) និងស៊ីត ស៊ីរ៉ាគុស (*Syracuse)* (ឬស៊ីត $3n+1$) ដែលណែនាំដោយលោក លូធឺ ខូលាតស៍ (*Luther collatz)* ក្នុងឆ្នាំ១៩៣៧។ ស៊ីត ស៊ីរ៉ាគុស ត្រូវបានធ្វើការពិភាក្សាអស់ជាច្រើនទសវត្សរ៍ ក្នុងចំណោមគណិតវិទូ។ ថ្វីបើតំលៃធំៗនៃតួរបស់ស៊ីតនេះ ត្រូវបានគេគណនា ហើយ ក៏ដោយ ក៏វានៅតែគ្មាននរណាដឹងថា តើវាជាស៊ីតមិនកំណត់ ឬស៊ីតកំណត់ហើយតួរបស់វាតែងតែបញ្ចប់ដោយលេខ 1 (មើល [2]) ។

ស៊ីតដែលបម្រុងសិក្សាក្នុងអត្ថបទនេះ ត្រូវបានណែនាំដោយតក្កវិទូអង់គ្លេស លោកហ្គូដស្ទេន អ.ល. (*R.L. Goodstein)* ក្នុងឆ្នាំ ១៩៤៤ ហើយវាបង្ហាញអំពីចរិតមិនធម្មតា ជាច្រើន។ តួដំបូងនៃស៊ីតនេះកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំង ដែលនាំឱ្យយើងជឿថា វានឹងខិតទៅរកអនន្ត ផ្ទុយទៅវិញ មានការភ្ញាក់ផ្អើលយ៉ាងខ្លាំង ព្រោះថាចុងបញ្ចប់នៃស៊ីតនេះគឺធ្លាក់ចុះ ហើយទីបញ្ចប់វាខិតទៅរកសូន្យទៅវិញ។ ដើម្បីបង្ហាញលទ្ធផលនេះ ទាមទារនូវ ភាពទូទៅ នៃគោលការណ៍លំដាប់លំដោយរៀបរយនៃចំនួនគត់ (មើល [4]) លើចំនួនដែលខិតទៅជិតអនន្ត ប៉ុន្តែគោលគំនិតដើម មិនពិបាកយល់នោះទេ។ ដើម្បីពន្យល់ ដូចជាហ៊ុតសុន (*Hudgson)* (មើល [5]) យើងចាប់ផ្តើមពីស៊ីតមួយ ឈ្មោះថាស៊ីតហ្គូដស្ទេនខ្សោយ (*Weak Goodstein*) ដែលមានលក្ខណៈងាយជាង តែស្រដៀងទៅនឹងស៊ីតហ្គូដស្ទេន។

១. ស៊ីតហ្គូដស្ទេនខ្សោយ

ដូចក្នុងកិច្ចការលោកហ៊ុតសុន យើង ពន្យល់ពីនិយមន័យនៃស៊ីតហ្គូដស្ទេនខ្សោយ ដោយ ចាប់ផ្តើមដោយយកចំនួន 266 ជាតួដំបូង។ ដូចជាចំនួនគត់វិជ្ជមានទាំងអស់ វាត្រូវបានបំបែកឱ្យទៅជាផលបូកនៃស្វ័យគុណគោល 2 (មើល [6])។ ដោយដឹងថា $266 = 2^8 + 2^3 + 2^1$ ។ ស៊ីតហ្គូដស្ទេនខ្សោយចាប់ផ្តើមដោយតួដំបូង $u_0 = 266$ ត្រូវបានគេកំណត់ដូចតទៅ។ u_1 បានមកពីការចម្លងគោល 2 ដែលប្រើដើម្បីសរសេរ u_0 តែត្រូវប្តូរគោល 2ទៅជាគោល 3 ហើយដក 1។ យើងសរសេរឡើងវិញនូវលទ្ធផលក្នុងគោលដូចនេះ $u_1 = 3^8 + 3^3 + 3^1 - 1 = 3^8 + 3^3 + 2 = 6590$ ។ ដើម្បីរក u_2 យើងដូរគោលក្នុង u_1 ពី 3 ទៅជា 4 ហើយដក 1 ហើយ សរសេរឡើងវិញនូវលទ្ធផលក្នុងគោល 4។ ដូ ច្នេះ $u_2 = 4^8 + 4^3 + 2 - 1 = 4^8 + 4^3 + 1 = 65601$ ។ យើ ងបន្តជំនួសតួនៃស៊ីតដោយចំនួនគត់ធម្មជាតិនៃគោលក្នុងតួមុន ដោយចំនួនគត់ធម្មជាតិបន្ទាប់ ហើយដក1 ហើយសរសេរលទ្ធផលឡើងវិញក្នុងគោលថ្មី។

$$u_0 = 2^8 + 2^3 + 2^1 = 266$$
$$u_1 = 3^8 + 3^3 + 3^1 - 1 = 3^8 + 3^3 + 2 = 6,590$$
$$u_2 = 4^8 + 4^3 + 2 - 1 = 4^8 + 4^3 + 1 = 65,601$$
$$u_3 = 5^8 + 5^3 + 1 - 1 = 5^8 + 5^3 = 390,750$$
$$u_4 = 6^8 + 6^3 - 1 = 6^8 + 5.6^2 + 6^2 - 1 = 6^8 + 5.6^2 + 5.6 + 6 - 1$$
$$= 6^8 + 5.6^2 + 5.6^1 + 5 = 1,679,831$$
$$u_5 = 7^8 + 5.7^2 + 5.7^1 + 5 - 1 = 7^8 + 5.7^2 + 5.7^1 + 4 = 5,765,085$$
$$u_6 = 8^8 + 5.8^2 + 5.8^1 + 4 - 1 = 8^8 + 5.8^2 + 5.8^1 + 3 = 16,777,579$$
$$u_7 = 9^8 + 5.9^2 + 5.9^1 + 3 - 1 = 9^8 + 5.9^2 + 5.9^1 + 2 = 43,047,173$$

$u_8 = 10^8 + 5.10^2 + 5.10^1 + 2 - 1 = 10^8 + 5.10^2 + 5.10^1 + 1 = 100,000,551$
$u_9 = 11^8 + 5.11^2 + 5.11^1 + 1 - 1 = 11^8 + 5.11^2 + 5.11^1 = 214,359,541$
$u_{10} = 12^8 + 5.12^2 + 5.12^1 - 1 = 12^8 + 5.12^2 + 4.12^1 + 12 - 1$
$= 12^8 + 5.12^2 + 4.12^1 + 11 = 429,982,475$

តារាង1:ធាតុដំបូងនៃស៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយ

ដូចដែលអ្នកបានឃើញនូវតួទាំងឡាយនៃស៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយ វាកើនឡើងយ៉ាងលឿនទៅរកតម្លៃដ៏ធំ ដូច្នេះប្រហែលជាអ្នកគិតថាស៊ីតទាំងនេះនៅតែបន្តការកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំងទៀត។ ប៉ុន្តែវាមិនអញ្ចឹងទេ។ ឧទាហរណ៍៖ ប្រសិនបើ $u_0 = 1$ នោះ $u_1 = 1 - 1 = 0$ ប្រសិនបើ $u_0 = 2 = 2^1$ នោះ $u_1 = 3^1 - 1 = 2, u_2 = 2 - 1 = 1$ ហើយ $u_3 = 1 - 1 = 0$ (ព្រោះគោលនៃ u_2 គឺ 4 ហើយគោលនៃ u_3 គឺ 5)។ អ្នកអាចពិនិត្យមើលនូវភាពដូចគ្នាផ្សេងទៀតផងដែរ ប្រសិនបើ $u_0 = 3$ នោះតួនៃស៊ីតនេះមិនអាចធំជាង 3 បានទេហើយវាថែមទាំងស្មើ 0 នៅជំហានទី 5 ។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយ នៅពេលបំបែកតួដំបូងមានស្វ័យគុណនៃ 2 លើសពី 2^1 នោះតួនៃស៊ីតកើនឡើងយ៉ាងឆាប់រហ័ស (ដូចបានពន្យល់នៅ $u_0 = 266$) ដែលយើងមានជំនឿថាស៊ីតនេះខិតទៅរកអនន្ត។ តើការដក 1 នៃគ្រប់ជំហានអាចកាត់បន្ថយយ៉ាងណា ដល់ការកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំងនៃតួស៊ីត តាមរយៈការបន្ថែមតម្លៃគោល1 ទៅគោលមួយទៀត?

ផ្ទុយពីនេះចូរពិនិត្យមើលយ៉ាងប្រុងប្រយ័ត្ននូវការបង្ហាញតាមតារាងខាងលើ។ ថ្វីបើតួបន្តបន្ទាប់នៃស៊ីត ដែល មានតួទីមួយស្មើ 266 កើនឡើងយ៉ាងឆាប់រហ័សក៏ដោយ ក៏ស្វ័យគុណនៃគោលបន្តបន្ទាប់ឈានទៅរកការធ្លាក់ចុះ។ ជាឧទាហរណ៍ស្វ័យគុណ 1 ក្នុង u_0 វាមិនមានវត្តមានក្នុង u_1 ទេ។ ប្រហាក់ប្រហែលនឹងស្វ័យគុណ 3 នៃ u_3 គឺត្រូវបានជំនួសដោយ 2 ក្នុង u_4។ នៅទីបញ្ចប់ស្វ័យគុណ 8 ក្នុង u_{10} បានរួមទៅរក 7 ហើយ 7 បន្តធ្លាក់ចុះបន្ថែមទៀត។ នេះជាលក្ខណៈរួមនៃស៊ីតហ្គូដស្តេន ដែលនឹងអនុញ្ញាតឱ្យយើងបង្ហាញថាស៊ីតនេះរួមទៅរកសូន្យ។ ដើម្បីឱ្យកាន់តែច្បាស់ យើងត្រូវសិក្សាពីស៊ីត ដែលមានតួជាចំនួនខិតទៅរកអនន្ត។

២.ចំនួនខិតទៅរកអនន្ត និងលំដាប់រៀបរយ

នៅក្នុងន័យសាមញ្ញ ចំនួន លំដាប់ត្រូវបានគេប្រើដើម្បីបង្ហាញទីតាំងក្នុងបញ្ជី៖ ទី១ ទី២ ទី៣ ...។ល។ ពិតណាស់ចំនួនគត់ធម្មជាតិវិជ្ជមាន ត្រូវបានគេប្រើជាមធ្យោបាយ ដើម្បីរៀបចំធាតុ នៃសំណុំមានកំណត់ណាមួយ។ ការសិក្សា ពីចំនួនមានលំដាប់ខិតទៅរកអនន្ត បានពង្រីកសញ្ញាណនៃចំនួនមានលំដាប់។ ជចច៍ ខាន់ធឺរ (*Georg Cunter)* ជាអ្នកដែលបានវិវឌ្ឍវា ដោយ ចងក្រងជាអត្ថបទនៅចុងសតវត្សទី ១៩ ។ ដោយហេតុថា សំណុំនៃចំនួនគត់ គឺជាសំណុំមានកំណត់ នោះស្រមៃថា យើងចាប់ផ្តើមរាប់ពី 0 បន្តទៅ យើងនឹងរាប់មិនចេះអស់។ យើងអាចនឹងស្រមៃថា មានចំនួន ω ដែលធំជាងគ្រប់ចំនួនគត់។ ព្រោះចំនួនគត់ជាច្រើនដែលមិនអា ចកំណត់បានតូចជាងចំនួន ω យើងហៅវាថាជា «ចំនួនលំដាប់ខិតទៅរកអនន្ត»។ វាមានចំនួនបន្តបន្ទាប់គឺ $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$ ហើយមានច្រើនបន្តទៀត។ ចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាងគេ ដែលធំជាងចំនួនលំដាប់មានទម្រង់ $\omega+n$ គឺ $\omega+\omega$ ឬ $\omega.2$ (មើល [8]) ហើយចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាងគេ តែធំជាងចំនួនលំដាប់ $\omega.n+m$ (ដែល m គឺជាចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាង $\omega.n$) គឺ ω^2 ។ ចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាង តែធំជាងចំនួនលំដាប់ ω^n+m (ដែល m គឺជាចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាង ω^n) គឺ ω^ω

$$\begin{array}{cc}
0, 1, 2, \ldots, n \ldots & \omega \\
\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n \ldots & \omega.2 \\
\omega.2+1, \omega.2+2, \ldots, \omega.2+n \ldots & \omega.3 \\
\omega.3+1, \omega.4, \ldots, \omega.n \ldots & \omega^2 \\
\omega^2+1, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^n \ldots & \omega^\omega
\end{array}$$

ពេលដែល ω^{ω} មានតួបន្ទាប់ $\omega^{\omega}+1,\omega^{\omega}+2,...,\omega^{2\omega},\omega^{2\omega}+1,...,\omega^{2\omega}+\omega,...,\omega^{3\omega},...,\omega^{\omega^{\omega}}$ ។ល។ ហើយដោយតាង ε_0 ដែលចំនួនលំដាប់តូចជាងគេបំផុត ឱ្យ ធំជាងគេផលបូកតួទាំងអស់ដែលស្វ័យគុណបន្តបន្ទាប់នៃ ω ហើយអាចបន្តដំណើរការគ្មានដែនកំណត់។ តាមពិតទៅ អ្វីទាំងអស់ ទោះយ៉ាងណា វា ចាប់ផ្តើមពីចំនួនលំដាប់បណ្តាក់ ព្រោះវាជាសំណុំរាប់បាន នោះគឺចំនួនលំដាប់អាចផ្ទួរផ្គងពីមួយទៅមួយ ជាមួយនឹងចំនួនគត់វិជ្ជមាន។

លំដាប់ និងលំដាប់រៀបរយ

ភាពសំខាន់ខុសគ្នារវាងចំនួនលំដាប់ខិតទៅរកអនន្ត និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន គឺត្រង់គ្រប់ចំនួនគត់ធំជាង 0 មានចំនួនដែលស្ថិតនៅមុនវា ដែលចំនួនលំដាប់ដូចជា ω, $\omega.2$ នឹង ω^{ω} មិនមានទេ។ ទោះជាយ៉ាងណាដូចជាសំណុំចំនួនគត់ដែរ សំណុំពង្រីកនៃចំនួនលំដាប់ គឺ «មានលំដាប់រៀបរយ» ក្នុងន័យថា គ្រប់សំណុំមិនទទេនៃចំនួនលំដាប់ មានធាតុមួយយ៉ាងតិច។ លក្ខណសម្បត្តិនេះ ជាមូលហេតុ ដែលយើងអាចទាញចេញនូវតថភាព ដែលថាមិនអាចមាន ស្វ៊ីតចុះដាច់ខាត យ៉ាងវែងមិនអាច កំណត់បាននៃចំនួនលំដាប់នោះទេ។ ឧបមាថា ៖ មានស្វ៊ីតមិនកំណត់បែបនោះ ដែលតាងដោយ $u_0,u_1,u_2,...$ ហើយ S ជាសំណុំតួរបស់វា។ គេឱ្យ S ជាសំណុំមិនទទេ វាមានធាតុមួយយ៉ាងតិចគឺ α ហើយ $\alpha=u_k$ ដែល k ជាចំនួនគត់។ តែស្វ៊ីតនេះជាស្វ៊ីតចុះដាច់ខាតនោះ $u_{k+1}<u_k=\alpha$ ដូចនេះ α មិនមែនជាធាតុតូចជាងគេរបស់ S ទេ ដែលវាផ្ទុយពីសម្មិតកម្ម។

ឥឡូវនេះយើងអាចបង្ហាញពីរបៀបប្រើចំនួនលំដាប់ដើម្បីស្រាយបញ្ជាក់ពីស្វ៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយ។

៣. បង្ហាញថាស្វ៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយ រួមទៅរក 0

ភ្ជាប់ជាមួយតួ u_n នៃស្វ៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយយើងបង្កើតស្វ៊ីតចុះ α_n នៃចំនួនលំដាប់ ដោយជំនួសគោលក្នុង u_n ដោយ ω។ ដោយគោលដំបូងរបស់ u_0 គឺ 2 ហើយដោយគោលរបស់ u_n កើន ១ រៀងរាល់តួ ការបំបែក u_n មានគោល $(n+2)$។ ស្វ៊ីតថ្មីដែលភ្ជាប់ទៅស្វ៊ីតមានតួដំបូង266 បង្ហាញក្នុងតារាង ២៖

n	u_n	α_n
0	$2^8+2^3+2^1$	$\omega^8+\omega^3+\omega^1$
1	$3^8+3^3+3-1=3^8+3^3+2$	$\omega^8+\omega^3+2$
2	4^8+4^3+1	$\omega^8+\omega^3+1$
3	5^8+5^3	$\omega^8+\omega^3$
4	$6^8+6^3-1=6^8+5.6^2+5.6^1+5$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.5+5$
5	$7^8+5.7^2+5.7^1+4$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.5+4$
6	$8^8+5.8^2+5.8^1+3$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.5+3$
...	...	...
9	$11^8+5.11^2+5.11^1$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.5$
10	$12^8+5.12^2+4.12^1+11$	$\omega^8+\omega^2.5+\omega^1.4+11$
...	...	...

តារាង2: ស្វ៊ីតនៃចំនួនលំដាប់ដែលត្រូវគ្នានឹងស្វ៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយ

តាមទម្រង់នេះ គ្រប់តួនៃស្វ៊ីត α_n ធំជាងតួត្រូវគ្នានៃស្វ៊ីត u_n តែដោយ u_n ជាស្វ៊ីតកើន ហើយ α_n ជាស្វ៊ីតចុះ។ ហេតុដែលការបំបែកតួ u_n ដោយប្រើគោល $(n+2)$ កើតឡើងបានលុះត្រាតែតួឯកតា u_n មិនស្មើ សូន្យ ឬអវត្តមាន ។ ដូចនេះឆ្លងពីតួមួយទៅមួយទៀត មានពីររបៀប៖

- បើតួឯកតារបស់ u_n មិនស្មើ 0 ដោយដក “1” រៀងរាល់តួបន្ទាប់ នោះតួឯកតា u_{n+1} តូចជាងតួឯកតា u_n មួយឯកតា (ក្នុងតារាង 2 ករណីនេះកើតឡើងពេលឆ្លងពី $u_1\to u_2$, $u_2\to u_3$, $u_4\to u_5$, $u_5\to u_6$)។
- បើតួឯកតាស្មើ 0 ក្នុងករណីនេះ ពេលគេ បំបែក u_n ដើម្បីសរសេរតាមគោលថ្មី គេត្រូវបញ្ចុះស្វ័យគុណដែលតូចជាងគេ។(ក្នុងតារាង 2 ករណីនេះកើតឡើងពី $u_0\to u_1$, $u_3\to u_4$, $u_9\to u_{10}$) មើលតារាង ១ ស្តីពីការបំបែក) (មើល [9])។

សង្កេតទាំងពីរករណី យើងឃើញថាα_n តូចជាង α_{n+1} គ្រប់តម្លៃ n។ ដោយចំនួនលំដាប់ ជាចំនួនដែលមានលំដាប់រៀបរយ នោះយើងមិនអាចមានស្វ៊ីតនៃចំនួនលំដាប់ ដែលចុះដាច់ខាតមិនកំណត់ទេ ដូច្នេះមាន m ជាចំនួនគត់ ដែល $\alpha_m = 0$ ។ លើសពីនេះទៀតដោយ $u_n \le \alpha_n$ សម្រាប់គ្រប់ n នោះu_mត្រូវតែស្មើ 0។ ពោលបានម្យ៉ាងទៀតថា តួរបស់u_nស្មើនឹង 0 ត្រឹមតែក្នុងចំនួនជំហានណាមួយ ទោះចំនួនជំហាននោះ អាចច្រើន យ៉ាងណាក្តី។

សូមអ្នកអានសាកល្បងសរសេរតួ u_nនិង α_nចាប់ផ្តើមពី$u_0 = 5$។ តើ n ស្មើប៉ុន្មាន ពេល $\alpha_n = \omega$។ តើ u_n ស្មើប៉ុន្មាននៅពេលនោះ ហើយតួបន្ទាប់ជាអ្វី (មើល[10])។

ជំហានបន្ទាប់យើងនឹងសិក្សាពីស្វ៊ីតហ្គូដស្តេន។ និយមន័យរបស់ស្វ៊ីតនេះមានលក្ខណៈខុសបន្តិច ពីស្វ៊ីតហ្គូដស្តេន ខ្សោយ ហើយចរិតកើនឡើងរបស់វាក៏គួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ដែរ។ ទោះយ៉ាងណា ការបង្ហាញពីភាពរួមទៅរកសូន្យ មានលក្ខណៈស្រដៀងគ្នានឹងអ្វីដែលយើងបានឃើញ។

៤. ស្វ៊ីតហ្គូដស្តេន

សង្កេតសារជាថ្មី នូវការជំនួសគោល 2 សម្រាប់ $266 : 2^8 + 2^3 + 2^1$។ ឥឡូវសរសេរស្វ័យគុណដោយប្រើតែគោ ល $2,\ 3 = 2^1 + 1,\ 8 = 2^3 = 2^{2+1}$។ ជាលទ្ធផលកន្សោមសម្រាប់ចំនួន 266 អាចសរសេរដោយគ្មានលេខណាធំជាង 2 ឡើយ។ តាងm_nជាស្វ៊ីតហ្គូដស្តេន ដែលចាប់ផ្តើមដោយតួ $u_0 = 266$។ ផ្តើមពី m_1 ដោយប្តូរពីការជួសគោល 2 ទៅគោល 3 ហើយដក 1 និងសរសេរឡើងវិញនូវលទ្ធផលដែលគ្មានលេខណាធំជាង 3 ឡើយ។ បន្តនូវដំណើរការច្រំដែល ដើម្បីបាននូវតួបន្តបន្ទាប់នៃm_n ដូចជាការបង្ហាញនូវក្នុងតារាង:

$$m_0 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2+1} + 2^1$$
$$m_1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 3^1 - 1 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3+1} + 2$$
$$= 443426488243037769948249630619149892886 \approx 10^{38}$$
$$m_2 = 4^{4^{4+1}} + +4^{4+1} + 1 \approx 10^{616}$$
$$m_3 = 5^{5^{5+1}} + 5^{5+1} \approx 10^{10921}$$
$$m_4 = 6^{6^{6+1}} + 6^{6+1} - 1 = 6^{6^{6+1}} + 5.6^6 + 5.6^5 + 5.6^4 + 5.6^3 + 5.6^2 + 5.6^1 + 5$$
$$\approx 10^{217832}$$
$$m_5 = 7^{7^{7+1}} + 5.7^7 + 5.7^5 + 5.7^4 + 5.7^3 + 5.7^2 + 5.7^1 + 4$$
$$\approx 10^{4871822}$$

តារាង 3

ដូចបានឃើញហើយ ទំហំនៃការកើនឡើងនៃតួគឺធំសម្បើមផ្ទុយទៅវិញ ដូចជាស្វ៊ីតហ្គូដស្តេនដទៃដែរ ពេលណាមួយនោះ ចាប់ផ្តើមចុះ ហើយចុងបញ្ចប់គឺរួមទៅរក 0។ ការស្រាយបញ្ជាក់វា ប្រហាក់ប្រហែលទៅនឹងការស្រាយបញ្ជាក់នៃស្វ៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយដែរ។ ដូចជាក្នុងករណីនេះ ស្វ៊ីត β_n ដែលភ្ជាប់ទៅនឹងស្វ៊ីត m_nដោយការប្តូរគោលដែលយើងជួបប្រទះទៅជា ω។ ពីរឬបីធាតុដំបូងនៃβ_n គឺមានទម្រង់ដូចតទៅ:

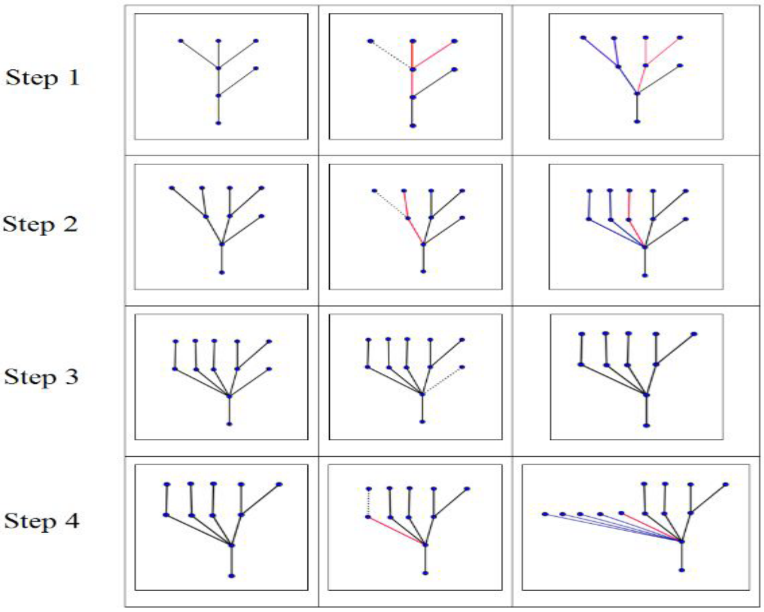
$$\beta_0 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + \omega^1$$
$$\beta_1 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 2$$
$$\beta_2 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1} + 1$$
$$\beta_3 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + \omega^{\omega+1}$$
$$\beta_4 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + 5.\omega^{\omega} + 5.\omega^5 + 5.\omega^4 + 5.\omega^3 + 5.\omega^2 + 5.\omega^1 + 5$$
$$\beta_5 = \omega^{\omega^{\omega+1}} + 5.\omega^{\omega} + 5.\omega^5 + 5.\omega^4 + 5.\omega^3 + 5.\omega^2 + 5.\omega^1 + 4$$

ស្វ៊ីត β_n គឺជាចំនួនលំដាប់ចុះដាច់ខាត ដែលការកំណត់នេះនាំឱ្យ មានធាតុតិចតួចណាស់ ហើយតួបន្តត្រូវបានគណនាយ៉ាងវែង ដោយគ្មានតួណាស្មើ 0 ទេ តែធាតុនៃស្វ៊ីតនេះគឺ0។ ការពន្យល់ប្រហែលគ្នានេះ អាចប្រើសម្រាប់ស្វ៊ីតហ្គូដស្តេនទាំងអស់។

នព្វន្តសាស្ត្រនៃចំនួនគត់លំដាប់ ត្រូវបានគេហៅថា នព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូ (*Peano arithmetic*) ព្រោះក្នុងសតវត្សទី១៩ គណិតវិទ្យាជនជាតិអ៊ីតាលី ឈ្មោះ ជីហ្សែប ភីណូ បាន បង្កើតនូវស្វ័យសត្យដំបូងបង្អស់។ នេះជាអ្វី ដែលយើងគួរកត់សម្គាល់ អំពីសម្រាយបញ្ជាក់ដ៏ល្អប្រណិត ដែលស្ថិតនៅក្រៅរង្វង់នៃ នព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូ តែនៅតែគោរពបាន នូវច្បាប់ក្នុង នព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូដដែល។ ពោលម៉្យាងទៀតថា វាប្រើទ្រឹស្តីទូទៅនៃសំណុំ ដែលរួមមានចំនួនមានលំដាប់ខិតទៅរកអនន្ត ដើម្បីស្រាយនូវទ្រឹស្តីបទពីចំនួនគត់វិជ្ជមាន មានន័យថា គ្រប់ ស៊ីតហ្គូដស្តេនរួមទៅរក 0។ សំណួរសួរថា តើភាពរួមនៃស៊ីតហ្គូដស្តេន អាចស្រាយបញ្ជាក់ ដោយមិនប្រើចំនួនមានលំដាប់ខិតទៅរកអនន្តទេ? ចម្លើយគឺទេ។ សម្រាយបញ្ជាក់មាននៅឆ្នាំ១៩៨២ ដោយលោក ឡូរី យ៉ឺប៊ី និង ចៃហ្វ ភែរីស គឺ ប្រហែលជា៤០ឆ្នាំ ក្រោយពេលស៊ីតនេះបង្ហាញខ្លួន (មើល [12])។ ពួកគេ រកឃើញថា បើភាពរួមនៃស៊ីតនេះ អាចស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើតែគោលការណ៍លំដាប់រៀបរយ របស់ ចំនួនគត់នោះ (មានន័យថា ក្នុងក្របខណ្ឌនៃនព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូ) នោះទ្រឹស្តីបទអំពីស៊ីតហ្គូដស្តេន អាចបំពេញទៅទ្រឹស្តីបទ ហ្គែនហ្សែន (*Gentzen*) ក្នុងឆ្នាំ ១៩៣៦ ដែលពេលនោះភាពមាំមួននៃនព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូនឹងចុំខ្សោយ។ ប៉ុន្តែយើងដឹងពីទ្រឹស្តីបទ គ្មានទីបញ្ចប់របស់ ហ្គូដែល (*Gödel incompletenesss*) (១៩៣១) ដែលថា ភាពមាំមួននៃនព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូ មិនអាចបកស្រាយ ដោយប្រើតែ នព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូ ខ្លួនឯងបានទេ ។ វាគ្មានប្រយោជន៍ទេ សម្រាប់អ្នកគណិតវិទ្យា ដែលចំណាយថាមពលខ្វះខ្វាយ ដើម្បីស្វែងរកសម្រាយបញ្ជាក់បែបនោះ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ដែល ធ្វើឱ្យមានការភ្ញាក់ផ្អើលខ្លាំងនោះ គឺការដែលស៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយខិតទៅរក 0 អាចស្រាយបញ្ជាក់ដោយប្រើតែ នព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូ ។ ហេតុនេះ សំខាន់ណាស់ ព្រោះ តួនៃស៊ីតភ្ជាប់តែជាមួយ ចំនួនលំដាប់ដែលតូចជាង ω^{ω} ។ ការស្រាយបញ្ជាក់មួយដោយលោក អ.អ. ស៊ីកុន (*E.A Cichon*) ដែលបានបង្ហាញពី ស៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយ ក្នុងឆ្នាំ ១៩៨៣ (មើល [13])។ ទៅនឹងតួនីមួយៗនៃស៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយ គេអាចភ្ជាប់ m ធាតុរៀបរយនៃមេគុណបំណែងចែក ក្នុងគោល $n+2$ រួចបង្ហាញថា m ធាតុរៀបរយ គោរពនូវ ភាពចុះដាច់ខាត នៃលំដាប់អក្ខរក្រម។

៥.ស៊ីតហ្គូដស្តេន និងល្បែងហាយដ្រា (Hydra)

នៅក្នុងអត្ថបទរបស់ពួកគេ យ៉ឺប៊ី និង ភែរីស បានបង្ហាញ នូវ ដំណើរការផ្សេងមួយទៀត គឺ ល្បែងហាយដ្រា ដែលស្រដៀងទៅនឹងស៊ីតហ្គូដស្តេន។ ល្បែងនេះ (មើល [14]) ត្រូវបានដាក់ឈ្មោះតាមរឿងទេវកថារបស់ក្រិច ដែលបានរៀបរាប់ពីការប្រយុទ្ធតស៊ូរវាងអ៊ែកគុល[1] (*Hercules*) និងសត្វដែលមានក្បាលច្រើនមានឈ្មោះថា ឡៀនៀន ហាយដ្រា។ ពេលដែលក្បាល ហាយដ្រា ត្រូវបានកាត់នោះ នឹងមានក្បាលពីរដុះចេញពីកន្លែងដែលកាត់។



[1] រឿងនេះធ្លាប់មានបញ្ចាំងជាភាពយន្តនៅកម្ពុជា ជំនាន់ដែលប្រទេសយើងអានសូរតាមភាសាបារាំង ដូចនេះ យើងរក្សាទុកសំនៀងដដែល ដោយមិនហៅតាមសំនៀងអង់គ្លេសទេ។

នៅក្នុងល្បែងនោះ ហាយដ្រាមានទម្រង់ជាដើមឈើ ហើយក្បាលរបស់វា ប្រៀបបាននឹងចុងឈើឬស្លឹក។ ប្រសិនបើអ៊ែគុលកាត់ក្បាលដែលមិនតជាប់ផ្ទាល់ទៅនឹងដើមទេ នោះមិនមានក្បាលដុះត្រង់នោះទេ តែនឹងមានក្បាលដុះនៅត្រង់ពីរថ្នាក់ក្រោមនោះ។ ការណ៍នេះ ត្រូវបានតាងដោយវិធីផ្សេងៗគ្នា។ ជាឧទាហរណ៍ ដោយឃឺប៊ី និង ភែរីស ហើយឧទាហរណ៍នេះបានប្រើប្រាស់ម្តងទៀត ដោយ ហ៊ុតសុន ។ ប្រសិនបើក្បាលត្រូវកាត់ផ្តាច់នៅជំហានទី n នៃល្បែង នោះហាយដ្រាត្រូវមានក្បាល n ដែល ដុះចេញពីផ្នែកនៃចុងខាងលើនៃក្បាលត្រូវកាត់ផ្តាច់។ ក្នុងដ្យាក្រាមខាងក្រោម ផ្នែកដែលកាត់ផ្តាច់គឺបង្ហាញដោយបន្ទាត់ដាច់ៗ អ្វីដែលនឹងកើតថ្មីតាងដោយពណ៌ក្រហម ហើយអ្វីដែលទើបកើតបង្ហាញជាពណ៌ខៀវ៖ មានលទ្ធភាពស្រាយបញ្ជាក់ថា មិនអាស្រ័យនឹងស្ថានភាពដើមយ៉ាងណា ឬ យុទ្ធសាស្ត្ររបស់អ៊ែគុលយ៉ាងណាក៏អ៊ែគុលនៅទីបញ្ចប់ តែងតែ ទទួលជោគជ័យក្នុងការកាត់ផ្តាច់ក្បាល ទោះជាទាមទារយូរក៏ដោយ។ ដូចករណីភាពរួមនៃស៊ីតហ្គូដស្តេន សម្រាយ បញ្ជាក់ ឈរលើ គោលការណ៍នៃទំនាក់ទំនងរវាង ទម្រង់ដើម ឈើ និងភាពចុះដាច់ខាតនៃស៊ីតចំនួនលំដាប់។ ដូចជាអ្នកបានស្មានទុក ពីដ្យាក្រាមដែលបានបង្ហាញខាងលើ មែកឈើចេះតែដុះថ្មីជាបន្តបន្ទាប់ ប៉ុន្តែកំពស់របស់វាចេះតែទាបចុះបន្តបន្ទាប់ដែរ។ ចុងបញ្ចប់ អ៊ែគុល នៅតែមានលទ្ធភាពកាត់ផ្តាច់ក្បាល ដែលនៅខាងលើលើសពីមួយជាន់នៃមែក ហើយនៅពេលនោះ (ដូចជាការបង្ហាញក្នុងជំហានទី 3) គាត់អាចកាត់ផ្តាច់ក្បាលម្តងមួយៗរហូតទាល់តែអស់ ដោយគ្មានក្បាលថ្មីកើតឡើងឡើយ។

៦. មេរៀនដែលចេញពីឧទាហរណ៍

ឧទាហរណ៍ក្នុងអត្ថបទខ្លីនេះគឺជាហេតុផលគួរចាប់អារម្មណ៍។ ដំបូងវាបង្ហាញនូវគណិតតក្កវិទ្យា ដែល មានទំនាក់ទំនង មិនត្រឹមតែ គណិតវិទ្យាទេ ព្រោះ ទ្រឹស្តីបទជាច្រើនដូចជាទ្រឹស្តីបទគ្មានទីបញ្ចប់ ហ្គូដែល និងវត្ថុដទៃទៀត ដូចជាចំនួនមានលំដាប់ខិតទៅរកអនន្តជាដើម ត្រូវការសម្រាប់សិក្សាពី គណិតវិទ្យាលំដាប់ ដូចជាស៊ីត នៃចំនួនគត់ និងដើមឈើគណិតវិទ្យាជាដើម។ តាមការបង្ហាញពីលក្ខណសម្បត្តិ នៃចំនួនគត់អាចឱ្យស្រាយបញ្ជាក់ ទ្រឹស្តីបទទូទៅនៃសំណុំ តែមិនមែនក្នុងក្របខណ្ឌ នព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូ ទេ។ ឧទាហរណ៍នេះគូសបញ្ជាក់ពី ការប្រុងប្រយ័ត្ន ក្នុងការប្រើទ្រស្តី និងពាក្យពេជ ពេលអះអាងនិងស្រាយបញ្ជាក់។ ក្នុងករណីនេះក៏បង្ហាញផងដែរនូវភាពទន់ខ្សោយរបស់ នព្វន្តសាស្ត្រ ភីណូ ជាងទ្រឹស្តីទូទៅនៃសំណុំ។

មេរៀនដទៃទៀតដែលបានមកពីឧទាហរណ៍នេះគឺការខិតចូលជិត បញ្ហាលំបាក (ភាពរួមនៃស៊ីតហ្គូដស្តេនទូទៅ) ដោយដោយបំផ្លែងវាជារបស់ងាយជាង (ភាពរួមនៃស៊ីតហ្គូដស្តេនខ្សោយ)។ លើសពីនេះ ឧទាហរណ៍បង្ហាញថា ប្រភេទនៃឧទាហរណ៍ (ស៊ីតមួយដែលតួវាមានតម្លៃដំបូង 266) អាចពន្យល់ពីលក្ខណៈសំខាន់ទាំងអស់នៃប្រភេទដូចគ្នា។ ឧទាហរណ៍នេះក៏បានបង្ហាត់បង្ហាញយើងផងដែរ ព្រោះវានាំ ឱ្យយើងយល់ពីភាពមានដែនកំណត់គំនិតអព្ភន្តរញ្ញាណ។ ស៊ីតដែលខិតជិតអនន្តតាមពិតទៅ វាមិន ប្រាកដជាដូចនោះទេ ជាយថាហេតុវាចុះ និងរួមទៅរកសូន្យនៅចំនួនកំណត់មួយនៃជំហាន។ ជា ចុងបញ្ចប់ ឧទាហរណ៍ អាចធ្វើឱ្យយើងបានឃើញទាំងសត្តភាព និងដែនកំណត់នៃបច្ចេកវិទ្យា ព្រោះបច្ចេកវិទ្យាផ្តល់ឱ្យយើងគននាបាននូវការកើនឡើងយ៉ាងខ្លាំងនៃតួនៃស៊ីតតែវាមាន ដែនកំណត់ ពេល ជួបប្រទះចំនួនលេខមហិមា ដែលបានពីនិយមន័យរបស់ស៊ីត។

ឯកសារយោង

[1] Elert, Glenn (1995-2007). The Chaos HypertextbookTM, Bodnar, M. & Ramsden P. Discrete Logistic Equation, Wolfram Demonstrations Project. Perrin, D. (2008). *La suite logistique et le chaos*.

[2] Lagarias, J. C. (2001) The Syracuse Problem. In Hazewinkel, Michiel, *Encyclopedia of Mathematics*, Springer.

[3] Goodstein, R. L. (1944). On the Restricted Ordinal Theorem, *Journal of Symbolic Logic*, **9**, 33-41.

[4] The well ordering principle for the integers states that if every element in a set S of integers is greater than some integer m, then S has a least element.

[5] Hodgson B. (2004). Herculean of Sisyphean tasks? *EMS Newsletter*, March 2004, pp. 11-16.

[6] Given an integer $b > 0$ with $b \neq 1$, every positive integer n has a unique *decomposition in base b*: $n = d_m.b^m + d_{m-1}.b^{m-1} + \ldots + d_1.b^1 + d_0$, where all the d_i are integers between 0 and $b-1$ and $d_m \neq 0$. Note that $b^m < n < b^{m+1}$. This is a generalization of the way we decompose numbers using base ten.

[7] If $u_0 = 3(= 2^1 + 1)$, then $u_1 = 3^1 + 1 - 1 = 3$, $u_2 = 4^1 - 1 = 3$, $u_3 = 3 - 1 = 2$, $u_4 = 2 - 1 = 1$, and $u^5 = 1 - 1 = 0$. Starting with u_3, each successive term is one less than the previous term because in each case the base is larger than the previous term.

[8] We extend the sum and product operations from the integers to the transfinite ordinal numbers, noting, however, that commutativity of addition and multiplication are not preserved.

[9] In general, when the unit term of u_n is zero, then the smallest term of u_n has the form $a.(b-1)^k$, where k is a positive integer and $a < b - 1$. Thus, because the base is increased by 1 and because 1 is subtracted from the result, the decomposition for u_{n+1} ends in

$$a.b^k - 1 = (a-1).b^k + b^k - 1 = (a-1).b^k + (b-1).b^{k-2} + (b-1).b^{k-3} + \ldots + (b-1).b^1 + (b-1).$$

So the coefficient of the smallest power of the base is reduced by 1 and the unit term becomes one less than the new base.

[10] The responses are as follows: $\alpha_n = \omega$ when $n = 29$, and thus $u_{29} = 31^1$. To obtain u_{30}, replace the base 31 by the base 32 and subtract 1. Hence $u_{30} = 32^1 - 1 = 31$, and so $\alpha_{30} = 31$. Given that the base of u_{30} is 32 and that $31 < 32$, starting from the subscript 30 the sequences u_n and α_n have exactly the same terms. They form a decreasing arithmetic sequence with constant difference -1, from which it follows that $u_{61} = \alpha_{61} = 0$.

[11] The terms of {mn} shown in Table 3 were computed usinghttp://www.wolframalpha.com.

[12] Kirby, L. and Paris, J. (1982). Accessible Independence Results for PeanoArithmetic, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14, 285-293.

[13] Cichon, E. A. (1983). A Short Proof of Two Recently Discovered IndependenceResults Using Recursion Theoretic Methods, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**, 704-706.

[14] Bauer, A. Java applet for the Hydra Game. (If the applet fails to work in onebrowser, try it in another.) Dehornoy, P. (2001) L'infiniest-ilnécessaire?*Pour laScience*, Dossier, and Dehornoy, P. (2009) *Cantor et les infinis.*