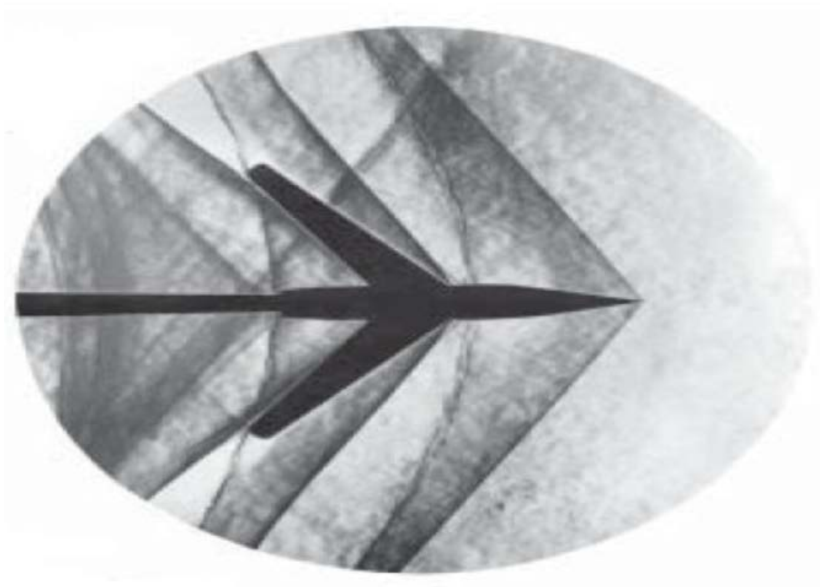
ប្រព្រឹត្តកម្មទង្គុក នៃចលនាក្នុងសន្ទនីយ

បង្ហោះនៅលើ 11 ខែតុលា ឆ្នាំ 2013 ដោយ Antoine Nectoux



រូបទី 1:រលកកញ្ជ្រក់នេះកើតមកពីយន្តហោះប្រតិកម្មលឿនជាងសម្លេង

អ្នកនិពន្ធដើម លោក David Mumford **និង** Christian Rousseau

អារម្ភកថា : អត្ថបទខ្លីនេះស្មុគ្រស្មាញជាងគេ។ ទោះជាយ៉ាងណា ក្នុងទំព័រមួយចំនួន តូចនេះ ដែលវាពន្យល់តាមរបៀបងាយ នូវបញ្ហាដែលមិនទាន់ដោះស្រាយបាននៅដើមសតវត្សរ៍ទី 21 នេះ។ អត្ថបទនេះប្រមូលផ្តុំដោយផ្នែកខ្លះដែលលោកអ្នកអាចអាន ឬក៏រម្លងចោលក៏បាន ។ អ្នករៀបរៀងគម្រោងក្លែនមានភាពរារែកខណៈពេលប្រកាសវាឡើង។ បន្ទាប់ពីការធ្វើតេស្ត ជាបទបង្ហាញពីរដងដល់គ្រូបង្រៀនមួយចំនួននៅសិក្ខាសាលា ពួកគេបានសម្តែង សេចក្តីរីករាយនឹងចង់ឃើញនូវអត្ថបទដែលលំបាកជាងនេះទៀតនោះ យើងសម្រេចប្រកាសវាឡើង។ យើងរង់ចាំយ៉ាងអន្ទះសារនូវ យោបល់របស់អ្នក ប្រសិនបើប្រធានបទនេះបានជម្រុញដល់លោកអ្នក មួយចំនួនឱ្យត្រិះរិះ។

អ្នកប្រហែលជាបានឮ ហើយថា យន្តហោះមួយចំនួន មកដល់មុនសម្លេងរបស់វា។ តើមានន័យយ៉ាងណា? មានន័យថា វាបង្កើតបានរលកកញ្ជ្រក់មួយនៅក្នុងលំហបរិយាកាស ដូចក្នុង រូបភាពទី 1។ ប៉ុន្តែអ្វីដែលជារលកកញ្ជ្រក់? ស្រមៃថាមានចរាចរណ៍យានធុនធ្ងន់នៅលើផ្លូវ ថាជារលក។ រលកកញ្ជ្រក់វាទាក់ទងទៅនឹងការទង្គុក។ ដើម្បីពន្យល់ បាតុភូតនេះ យើង ធ្វើវិចារក្នុងម៉ូដែលសន្ទនីយវិមាត្រ១:

ចរាចរណ៍នៅលើ ផ្លូវមួយក្នុងល្បឿនខុសគ្នា។ យើងដឹងហើយថា ការ ទង្គុកអាចកើតមាន ប្រសិនបើតែកុងមិនលៃតម្រូវល្បឿនរបស់ពួកគេ។ លំហាបរិយាកាស គឺ ជាសន្ទនីយមួយ ហើយចរាចរណ៍ក្នុងនោះ គឺជាម៉ូដែលដ៏ ស្មុគ្រស្មាញនៃសន្ទនីយវិមាត្រ១ ដើម្បីអភិវឌ្ឍវិចាររបស់យើង។ នៅក្រោមលក្ខខណ្ឌណាដែលធ្វើរលកកញ្ឆក់ ឬ ធាតុប្រហាក់ប្រហែលផ្សេងទៀត កើតឡើងនៅក្នុងវត្ថុរាវ ? រង្វាន់មួយលានដុល្លានឹងត្រូវបានផ្តល់ជូន សម្រាប់ការឆ្លើយសំណួរនេះ។ នេះគឺជាអ្វីដែលយើងនឹងពន្យល់អ្នក។

១ ម៉ូដែលវិមាត្រមួយ

សមីការ Burgeer

យើងសាងនូវគម្រូចរាចរណ៍មួយដ៏សាមញ្ញ។ យើងមានរថយន្ត នៅតាមទីតាំង x លើបន្ទាត់មួយ ដែលតំណាងឱ្យផ្លូវមួយ។ នៅខណៈពេល t = 0 រថយន្តនៅទីតាំង x_0 មានល្បឿន $V_0(x_0)$។ រថយន្តដែលចេញពី x_0 នឹងទៅដល់ $x(t, x_0)$នៅខណៈពេល t ។ តាង $V(x(t, x_0), t)$ ល្បឿនរថយន្តនៅទីតាំង $x(t, x_0)$ និងពេលវេលា t។ សម្មិតកម្មនេះគឺថា រថយន្តផ្លាស់ទីដោយល្បឿនថេរ តាមបណ្តោយផ្លូវ។ ដូច្នេះយើងបាន $V(x(t, x_0), t) = V_0(x_0)$ ដែលមានន័យថាអនុគមន៍នេះថេរធៀបនឹង t ។ ដូច្នេះ ដេរីវេរបស់វាគួរត្រូវស្មើសូន្យ! ដោយច្បាប់បណ្តាក់នៃអនុគមន៍ច្រើនអថេរយើងមាន

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V(x(t,x_0),t) &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t,x_0),t)\frac{\partial x}{\partial t}(t,x_0) + \frac{\partial V}{\partial t}(x(t,x_0),t) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}(x(t,x_0),t)V_0(x_0) + \frac{\partial V}{\partial t}(x(t,x_0),t).\end{aligned}$$

យើងសរសេរសម្រួលទីតាំងនៅលើផ្លូវដែលជាអថេរ x, ហើយដោយសារ $V(x(t, x_0), t) = V_0(x_0)$ នោះសមីការចលនានេះក្លាយទៅជាសមីការ Burgerដូចនេះ

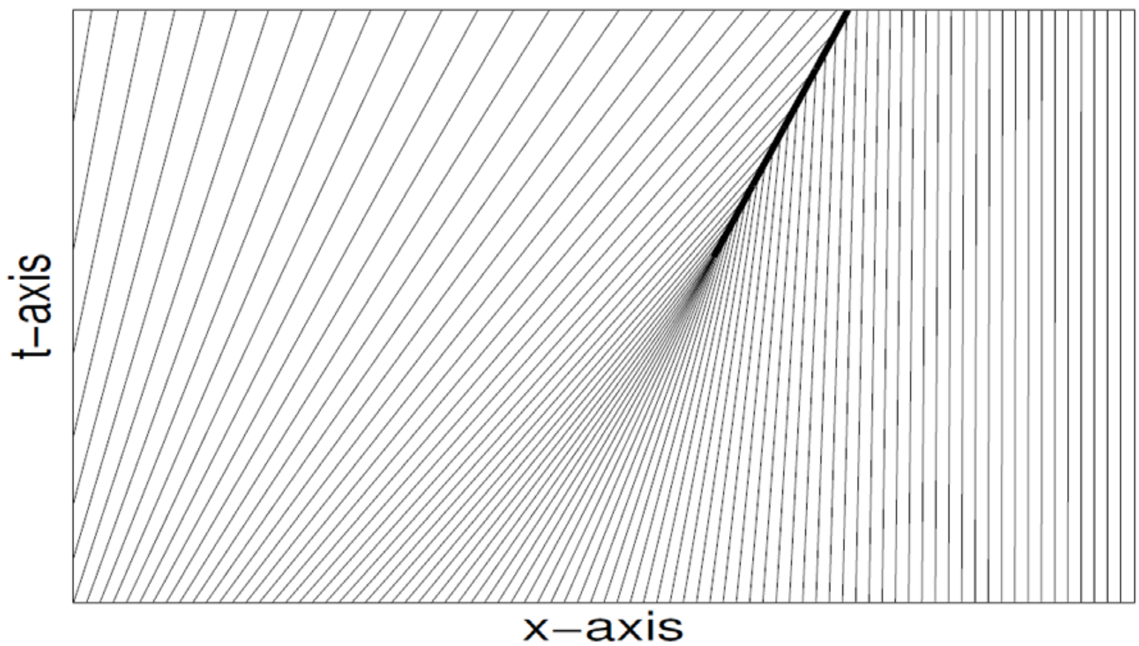
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\cdot V = 0. \quad (1)$$

សមីការនេះបង្ហាញថា រថយន្តនិមួយៗ រក្សាល្បឿនថេរពេលផ្លាស់ទីតាមផ្លូវ។

វិធីមួយផ្សេងទៀត អាចពោលថា ប្រសិនបើរថយន្តនៅទីតាំង x_0 មួយដែលបាន ចាប់ផ្តើមពីល្បឿន $V_0 = V(x_0, 0)$ នោះ នៅខណៈ t វានឹងស្ថិតនៅទីតាំង $x_0 + tV_0$ប្រកបដោយល្បឿនដដែល :

$V(x_0 + tV_0, t) = V_0$ សម្រាប់គ្រប់តំលៃ t ។

ជាការពិតណាស់ នេះ មិនមែនជាគំនិតមិនអស្ចារ្យទេ! ការ ទង្គុកនឹងកើតមានឡើងដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី 2 ពីភាពរឹករវមួយ។

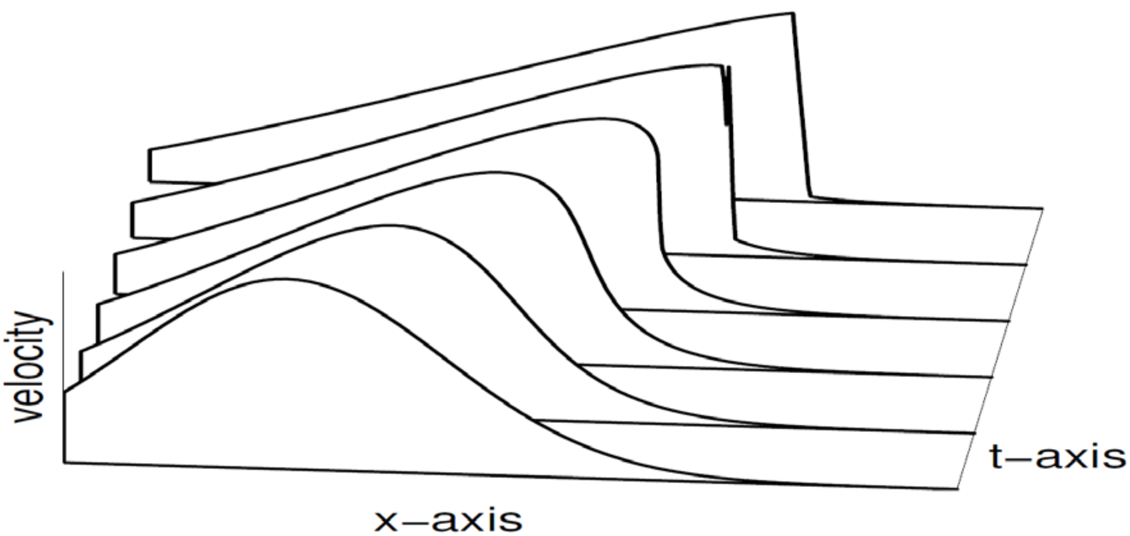


រូបទី 2: រលកកញ្ឆក់ នៅក្នុងសមីការ Burger សម្រាប់ ល្បឿនដំបូង ដែល តាងដោយ $V(x)=exp(-x^2)$។ ខ្សែជាច្រើននេះបង្ហាញ ពីរថយន្តដែលពីដំបូងស្ថិតចន្លោះស្មើគ្នា។ បន្ទា ប់មកឆ្នូតពណ៌ខ្មៅដឹត គឺជា ទីដែលកើតការទង្គុកនឹងកើតឡើង។

ពិពណ៌នាអំពីកញ្ឆក់នេះ

តើមានអ្វីកើតឡើង នៅពេលដែលយើង ខិតទៅរកការកញ្ឆក់នោះ? ឧបមាថា ពីដំបូង ($t = 0$) ត្រង់ចំណុចពីរ $x_0 < y_0$ មានល្បឿន $V(x_0, 0) > V(y_0, 0)$។ យើងសម្គាល់ទីតាំងនៃ x_0 នៅខណៈពេល t ដោយ x_t ដូចគ្នានេះដែរ y_tនៅ ទីតាំង y_0 នៅខណៈពេល t ។ ពេល x_tខិតជិត y_t គឺនៅមុនពេលមានកញ្ឆក់ x_t គឺខិតយ៉ាងជិតទៅរក y_t។ ដូច្នោះ ផលសងនៃល្បឿនគឺ $V(x_t, t) - V(y_t, t) = V(x_0, 0) - V(y_0, 0)$ របស់ វានៅតែមានដូចគ្នា។ នេះមានន័យថា មេគុណប្រាប់ទិសនៃអនុគមន៍ $V(x, t)$ ដែលជាអនុគមន៍នៃ x សម្រាប់តំលៃ t ថេរជា ទំហំធំខ្លាំងណាស់ (សូមមើល រូបទី 3 ដែល បានបង្ហាញ ក្រាហ្វនៃ $V(x, t)$ ជា អនុគមន៍នៃ x សម្រាប់

តម្លៃផ្សេងគ្នាៗនៃ t)។ ដូច្នេះ យើងឃើញថា $\frac{\partial V}{\partial x}$ ខិតទៅរកអនន្ត មុនពេលកញ្ឆក់។ មានន័យថា សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល (1) របស់យើង មានលក្ខណ:ដោយឡែកមួយពេលមានកញ្ឆក់។



រូបភាពទី 3: ក្នុងស្ថានភាព ដូចគ្នានឹងរូបភាពទី 2, យើងបង្ហាញ ក្រាហ្វនៃល្បឿន ជា អនុគមន៍នៃលំហ សម្រាប់រយ:ពេលប្រាំមួយផ្សេងគ្នា។ គួរកត់សម្គាល់ថាតើល្បឿន បានក្លាយជាដាច់ នៅពេល ដែលរលកកញ្ឆក់នេះមានរបត់ចុះ ហើយល្បឿននេះ ក្លាយទៅជាអនន្ត សម្រាប់ x ថេរ និងសម្រាប់ t ថេរ។

២ ម៉ូដែលកញ្ឆក់ពិត ឬ ម៉ូដែលនៃទធីជៀសវាងទវា?

យើងបាន បង្កើតម៉ូដែលដែលមានព្រឹត្តិការណ៍ រថយន្តទាំងអស់ដែលធ្វើដំណើរ តាមបណ្តោយ ផ្លូវ ហើយមិនផ្លាស់ប្តូរល្បឿន។ ប្រសិនបើអនុគមន៍ $V(x)$នេះត្រូវបានកើនឡើង ជាមួយ x បន្ទាប់មក រថយន្តនៅខាងមុខមានល្បឿនលឿនជាងរថយន្តនៅពីក្រោយ នោះនឹងមិនមានបញ្ហា កើតឡើងទេ។ ប៉ុន្តែប្រសិនបើ រថយន្ត ដែលបើកយឺតនៅខាងមុខរថយន្តដែលបើកលឿន នោះវានឹងប៉ះគ្នា ប្រសិនបើគ្មាននរណាម្នាក់កែប្រែល្បឿនទេ។ មានវិធីពីរ ដើម្បីអភិវឌ្ឍម៉ូដែល បន្ថែមទៀត ។ យើងត្រលប់ទៅការពិនិត្យលើកដំបូងរបស់យើង ដែលរលកកញ្ឆក់លឿនជាងសម្លេង យើងអាចផ្លាស់ប្តូរសមីការរបស់យើង ដើម្បីរួមបញ្ចូល ទង្គុក ដែលជា ទម្រង់វិមាត្រ១ នៃការប៉ះទង្គុក។ មូលហេតុដែលនៅពីក្រោយ ក៏ដូចគ្នាសម្រាប់យន្តហោះលឿនជាងសម្លេងដែរ គឺ ខ្យល់នៅក្នុងផ្នែកខាងមុខនៃយន្តហោះ មិនអាចធ្វើដំណើរបានលឿនគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីគេចផុតពី យន្តហោះមកដល់ពីក្រោយ! ឬយើងអាច

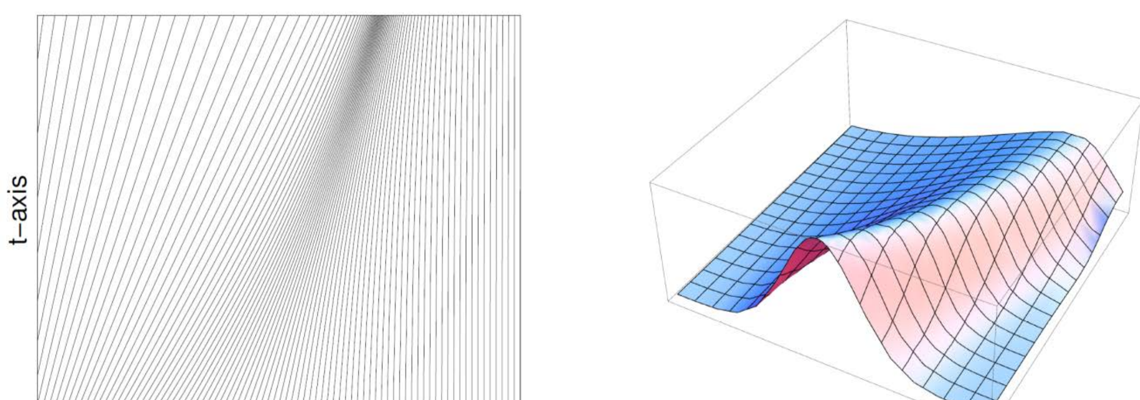
ផ្លាស់ប្តូរសមីការរបស់យើង ដើម្បីអនុញ្ញាត ឱ្យមាន ការបើកបរដោយឆ្លាតវៃ ដោយបានរថយន្តលឿន បន្ថយល្បឿន ហើយរថយន្តយឺតជាងត្រូវ បន្ថែមល្បឿនឡើង។

អ្នកបើកបរខាងវៃ

នៅពេលដែលប៉ះទង្គិកគ្នាមួយគឺ កើតឡើងនោះ សកម្មភាពរបស់អ្នកបើកបរវាងវៃ ប្រាកដត្រូវបានរងឥទ្ធិពលដោយអ្នកបើកបរដូចគ្នា ដោយខិតខំលៃតម្រូវល្បឿនជាមួយគេ។ បើរថយន្ត ពីរខិតជិតគ្នា នោះល្បឿនត្រូវសំរបសំរួលតាមអ្នកបើកបរដូចគ្នា។ ភាពស្រដៀងគ្នានេះ អាចឱ្យនឹកដល់ភាពខន់នៃសារធាតុរាវមួយៈ ប្រសិនបើអ្នកបានសង្កេត ដំណក់ទឹកឃ្មុំហូរ អ្នកអាចនឹងកត់សម្គាល់ថាវានៅខន់ជាប់គ្នា មិនមានដំណក់ បាន សាចជុំវិញឡើយ គឺនៅភ្ជាប់ទៅនឹងខ្សែទឹកមេជានិច្ច។ ទឹកមានភាពខន់ 10,000ដង តិចជាង (ទឹកឃ្មុំ) ហើយ ខ្យល់តិចជាងទឹក 50 ដង ប៉ុន្តែមិនសូន្យ ទេ។ ដូច្នេះ ការកែ ប្រែអាច ធ្វើទៅលើសមីការ Burger ដើម្បីចៀសវាងទង្គិក គឺ នៅពេលដែល ល្បឿន ដំបូង V_0 ត្រូវគិតបន្ថែមភាពខន់។ គឺគេគ្រាន់តែ គុណនឹងដេរីវេទីពីរ $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$។ ហេតុនេះសមីការកែប្រែនេះមានទម្រង់ដែលគេស្គាល់ថាជា សមីការ Burger នៃភាពខន់។

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot V = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (2)$$

ជាមួយ $\nu > 0$ ដែលគេហៅថា ភាពខន់ ។ « បន្ទាត់ពិភពលោក» (គន្លងដែលអង្គធាតុធ្វើចលនាក្នុងប្រព័ន្ធវិមាត្រ៤) បានកែប្រែទៅជារាងដូចដែលយើងឃើញនៅក្នុងរូបភាពទី4 សម្រាប់ករណីដូចគ្នានៃអនុគមន៍ $V(x)$ ដែលពិពណ៌នាពីដំបូងនៅក្នុងរូបទី2។



រូបទី4:ដូចនៅក្នុងករណីរូបទី 2 យើងបន្ថែមភាពខន់។ ចំណាំថា រថយន្តនៅបន្តគ្នា ប៉ុន្តែមិនជល់គ្នាទេ។ នៅខាងស្តាំនេះយើងមើលឃើញក្រាហ្វនៃ V(x,t) ផងដែរ។

ហេតុអ្វីបានជាដេរីវេទីពីរ? រំលឹកឡើងវិញថាដេរីវេទីពីរគឺជាលីមីតនៃ

(3) $$\frac{V(x+\delta x,t)-2V(x,t)+V(x-\delta x,t)}{\delta x^2}.$$

អ្នកអាចឃើញថាវាជាដេរីវេទី១ នៃដេរីវេទី១ ដូច្នេះវាប្រហាក់ប្រហែលនឹង

$$\frac{V'(x+\delta x/2,t)-V'(x-\delta x/2,t)}{\delta x}$$
$$\approx \frac{1}{\delta x}\left(\frac{V(x+\delta x,t)-V(x,t)}{\delta x}-\frac{V(x,t)-V(x-\delta x,t)}{\delta x}\right).$$

យើងសរសេរកន្សោមនេះសាថ្មីជារាង

$$\frac{2}{(\delta x)^2}\,\frac{(V(x+\delta x,t)-V(x,t))+(V(x-\delta x,t)-V(x,t))}{2}.$$

តើកត្តាទីពីរនេះជាអ្វី? វាមានន័យពីរៈ គឺជាតម្លៃមធ្យមនៃគម្លាតល្បឿននៅខាងមុខ នឹ ង នៅកណ្ដាល និង តម្លៃមធ្យមទីពីរគឺគម្លាតនៃល្បឿននៅកណ្ដាល និង ខាងក្រោយ ។ គ្រោះថ្នាក់នៃការប៉ះទង្គិចគ្នាកើតមាននៅពេល $V(x-\delta x,t)>V(x,t)>V(x+\delta x,t)$។ ក្នុងករណីនោះ កន្សោមដំបូងអវិជ្ជមាន និង កន្សោមទីពីរវិជ្ជមាន។ ប្រសិនបើ កន្សោមដំបូងពិតនោះតម្លៃវាមធ្យមវាអវិជ្ជមាន ហើយ (3) បង្ហាញថា អ្នកគួរតែបន្ថយល្បឿន បើសិនជាមានសំទុះនៅខាងឆ្វេង។ ប្រសិនបើ កន្សោមទីពីរពិត មានន័យថាអ្នកគួរតែ បង្កើនល្បឿន ។

ខណៈយ៉ាងខ្លីមុនប៉ះទង្គិក មានភាពខន់កើតពីរថយន្តលឿន ប៉ះពាល់ដល់រថយន្តយឺត។

ការបន្ថែមភាពខន់ទៅក្នុង សមីការ Burger បានដកចេញនូវទង្គិក! ឥឡូវនេះ យើងអាច រៀបរាប់ ប្រាប់អ្នក អំពីរង្វាន់ប្រាក់លានដុល្លា។

ចំណាំថាសម្រាប់ x_0 ថេរ ផ្នែកខាងឆ្វេងតំណាងឱ្យ សំទុះ ដោយវាជា ដេរីវេនៃអនុគមន៍ $V(x(t,x_0),t)$ ជាមួយនឹងអថេរ t ។ ដូច្នេះ សមីការ ភាពខន់បន្ទាប់ពីកែប្រែ ពោលថា ប្រសិនបើ រថយន្តដែលនៅកណ្ដាល យឺតជាងល្បឿនមធ្យម រថយន្តជិតខាង នោះវាបង្កើន ល្បឿន។ ប្រសិនបើ វាលឿនជាងគេ នោះវាពន្យឺតល្បឿន។

៣. ការរាវរកម៉ូដែលនៃចលនាក្នុងពិភពពិត

សំណាក់ម៉ូដែលនៃចលនាក្នុងពិភពពិត

យើងបានបំភាន់បន្តិច ដើម្បីធ្វើគណិតវិទ្យាដ៏ស្រស់ស្អាត មួយ ចេញពីពិភពពិត ដែលប្រប្លូកច្របល់ស្មុគស្មាញ។ មួយចំណែក យើងមិនបានយកចិត្តទុកដាក់លើដង់ស៊ីតេនៃរថយន្ត នៅលើផ្លូវ។ ម៉ូដែលចរាចរណ៍ដែលប្រសើរ ដូច ជាម៉ូដែល Lighthill - Whitham - Richards គិតគូរ ដោយរួមផ្សំទាំងដង់ស៊ីតេមធ្យម $D(x,t)$ ព្រមទាំងល្បឿនមធ្យម$V(x,t)$។ ប៉ុន្តែ កំណែសមីការ រ Burger នៅតែគ្របដណ្តប់ម៉ូដែលទាំងនេះ ដូច្នេះការពិភាក្សារបស់យើង ជាមូលដ្ឋាននៅតែត្រូវ។

ចលនា នៃខ្យល់នៅជុំវិញយន្តហោះ ជាពិសេសនៅជុំវិញស្លាបរបស់វា ហើយ ចលនានៃទឹក នៅជុំវិញទូក គឺជា ការអនុវត្តន៍ក្នុងពិភពពិតប្រាកដទាក់ទាញការចាប់អារម្មណ៍ជាច្រើន។ គណិតវិទូ បានធ្វើការបង្ហាញម៉ូដែលជាច្រើនដែលមិនធ្លាប់មាន ចាប់តាំងពីក្រោយ Euler នៅក្នុងសតវត្សទី 18។ ខ្យល់ និង ទឹក គឺមានភាពខុសគ្នាជាមូលដ្ឋាន ដោយសារតែទឹក មិនអាចបណ្ណែនបាន ខណ:ពេល ដែលខ្យល់ អាចបណ្ណែនបានច្រើន។ ភាពមិនអាចបណ្ណែនប្រេង ត្រូវបានប្រើប្រាស់ក្នុងឧទាហរណ៍ ជាច្រើន ក្នុងការបញ្ជូនកម្លាំងនៅក្នុងម៉ាស៊ីន ដូចជា ត្រាក់ទ័រ រុញឈូស និង ត្រាក់ទ័រជីក ។ រង្វាន់លានដុល្លារ ទាក់ទងនឹង ករណីមិនអាចបណ្ណែនក្នុងវិមាត្រ បី។

រង្វាន់ ប្រាក់លានដុល្លារ

ដើម្បីអបអរ គណិតវិទ្យា នៅក្នុង សហសវត្សរ៍ ថ្មីនេះ Landon T. Clay បានបង្កើតឡើងពានរង្វាន់ ប្រាំពីរ។ រង្វាន់នេះគឺបាន បង្កើតដើម្បីធ្វើការកត់ត្រាបញ្ហាលំបាកៗបំផុតមួយចំនួន ដែលត្រូវបាន គណិតវិទូមួយ ចំនួនព្យាយាមដោះស្រាយជាបន្តបន្ទាប់ រហូតដល់សហវត្សទីពីរ ព្រមទាំងបង្ហាញ សាធារណជនទូទៅនូវការពិតដែលថា នៅក្នុងគណិតវិទ្យាសមរភូមិនៅតែចំហ និងមិនទាន់បាន ដោះស្រាយ បញ្ហាសំខាន់ៗ ជាច្រើន ។ រង្វាន់មួយលាន ដុល្លារ នឹងត្រូវបានផ្តល់សម្រាប់ការ ដោះស្រាយបញ្ហានីមួយៗ ហើយបញ្ហាមួយក្នុងចំណោមនោះ (ការប្រមាណរបស់ Poincaré) ត្រូវបាន ដោះស្រាយ! រង្វាន់មួយលានដុល្លា ដែលយើង ចាប់អារម្មណ៍ គឺទាក់ទងនឹងសមីការគ្រប់គ្រងលំហូរនៃ សារធាតុរាវមិនអាចបណ្ណែនបាន ហើយខន់ ក្នុងលំហវិមាត្របី។ សមីការនេះ ហៅថាសមីការ Navier - Stoke , ដែលយកឈ្មោះតាម លោក Louis - Claude Navier (1785-1836) និងលោក George Stoke , (1819-1903) ដែល បានធ្វើការសិក្សាទៅលើចលនានៃវត្ថុរាវ។ លើកលែងតែភាពមិនអាចបណ្ណែន

បាន ដែលយើងនឹងពន្យល់ខាងក្រោម សមីការទាំងនេះមានលក្ខណៈសាមញ្ញ ដោយគ្រាន់តែធ្វើការកែប្រែជាថ្មីលើសមីការបីវិមាត្រ នៃ Burger ជាមួយភាពខន់។ តើគួរប្រើអ្វី? គណិតវិទូភាគច្រើនស្មានថា សមីការ Navier - Stoke មិនបង្កើតទង្គុ ក ឬ ចលនាណាមួយផ្សេងទៀត ដូចជា ចលនាតូចគ្រប់ទំហំតាំងពីធំដល់តូចនោះទេ។ ដូច្នេះ សមីការគួរតែងាយដោះស្រាយបានក្នុងពេលវេលាគ្រប់គ្រាន់។ ប្រសិនបើអ្នកបញ្ជាក់ថា បានពិនិត្យផ្ទៀងផ្ទាត់ដោយខ្លួនអ្នក ប៉ុន្តែសម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ យើងមិនជឿការសន្និដ្ឋានមុនសម្រាយបញ្ជាក់ទេ។ ដូច្នេះ ប្រសិនបើអ្នកអាចបង្ហាញឧទាហរណ៍ នៃលក្ខខណ្ឌដំបូង កើតឡើងពីទង្គុក ឬ លក្ខណៈសាមញ្ញដទៃទៀត នៅក្នុងពេលកំណត់មួយ ក៏ការពិនិត្យផ្ទៀងផ្ទាត់ជាតួនាទីរបស់អ្នកផងដែរ។ ហេតុអ្វីបានជា គណិតវិទូ ជឿថាគ្មាន ការទង្គុក ឬលក្ខណៈសាមញ្ញផ្សេងទៀតមិនកើតឡើងនៅក្នុងសមីការ Navier - Stoke ? សម្រាយបញ្ជាក់សម្រាប់ករណីលំហូរវិមាត្រពីរ មានតាំងពីច្រើនទសវត្សរ៍មកហើយ ដោយស្ត្រីជនជាតិ រុស្ស៊ី លោកស្រី Olga Ladyzhenskaya ។ ចាប់តាំងពីពេលនោះមក វិភាគលេខមិនអាចរាវរកលក្ខណៈដូចសាមញ្ញណាមួយកើតឡើងនៅក្នុង ករណីសមីការវិមាត្របីទេ។ វិភាគលេខរកដំណោះស្រាយសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយផ្នែក គឺជាបញ្ហាប្រឈមដ៏ធំមួយ ដែលតម្រូវឱ្យមានការគណនាអាល់ការីតដ៏ស្មុគ្រស្មាញនិងកម្មវិធីដ៏ធំ ត្រូវរត់ក្នុងល្បឿនលឿនលើកុំព្យូទ័រដែលមានអានុភាពខ្លាំងក្លា។តើនោះជាភាពផ្ទុយគ្នារវាងការទង្គុកនៃរលកក្នុង រូបទី 1 មែនទេ? ទេ! ខ្យល់អាចបណ្ណែនបាន តែរង្វាន់ប្រាក់លានហាក់មិនមែនជាលំហូរដែលបណ្ណែនបានទេ។ ចុងក្រោយនៃផ្នែកនេះ ជាជំនួយសម្រាប់អ្នកក្នុងទិសដៅពីរ។ ដំបូងយើង ពន្យល់ពីរបៀបដែលយើងអាចរកចម្លើយទោលសម្រាប់សមីការ Burger បាន (សូមមើលផ្នែក ទី 5 និង អានបន្ថែម 1)។ ប្រសិនបើ អ្នកនៅចាំមេរៀន ពីការគណនាច្រើនរបៀប អ្នកអាចអានពីរបៀបដែលយើងកែប្រែសមីការ Burger ទៅជាម៉ូដែលចលនានៃវត្ថុរាវមិនអាចបណ្ណែនបាន ក្នុងលំហាវិមាត្របី (សូមមើលរូបផ្នែកទី6 និង អានបន្ថែម 2)។

៤. សេចក្តីសន្និដ្ឋាន

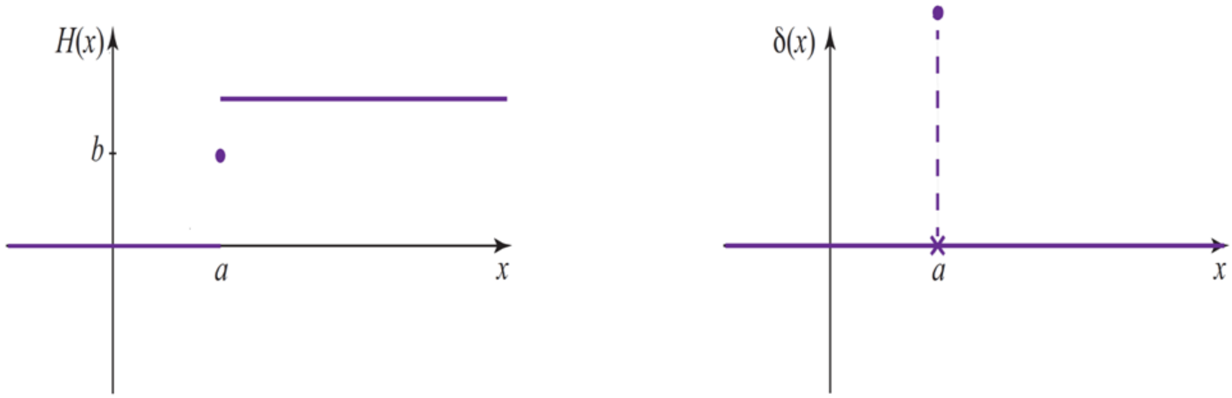
តើយើងបានរៀនពីអ្វី? ច្រើនរឿង។ ឧទាហរណ៍អ្នកអាចស្រមៃនឹកថា ម៉ូដែលនៃសារធាតុរាវមួយ ពិតជាស្មុគស្មាញ ដែលអ្នកមិន អាចយល់បាន។ ឥឡូវនេះអ្នកបានដឹងថា វាមានគោលការណ៍មូលដ្ឋានដូចគ្នានឹងមេកានិច ដែលអ្នកបានឃើញ ពេលសិក្សាអំពីកម្លាំង ច្បាប់ញូតុន , ច្បាប់រក្សាថាមពល។ ដូចគ្នានេះដែរ ឧបករណ៍ដែលយកមកប្រើពន្យល់ច្បាប់រូបវិទ្យាទាំងនេះ បានប្រើនូវសញ្ញាណដំបូងនៃ ការគណនាច្រើនរបៀប។ ទម្រង់នៃសមីការគ្រប់គ្រងចលនានៃសារធាតុរាវ

គឺសាមញ្ញ ណាស់។ តែមានសំណួរចំហ(មិនទាន់មានចម្លើយ) ជាច្រើនស្ដីពីចម្លើយរបស់សមីការទាំងនេះ បើទោះបីជាវាត្រូវបានគេ សិក្សាល្អិតល្អន់ទាំងទ្រឹស្ដី និងលេខច្រើនជាង២០០ឆ្នាំក៏ដោយ។ ប្រសិនបើអ្នកបានអាន ម៉ូដែលនៃការទង្គុកនោះ អ្នកបានឃើញនូវមុខការដ៏សំខាន់មួយនៃការងាររបស់គណិតវិទូ។ ពេលដែលមិនមានដំណោះស្រាយបញ្ហាមួយ គណិតវិទូអាចបង្កើតវត្ថុមួយដែលជាដំណោះស្រាយបញ្ហានោះ។ អ្នកប្រហែលជាដឹងហើយពីការបង្កើតចំនួនកុំផ្លិចបន្ថែមលើ $\mathbb{R}$ ដែលជាឫសគល់នៃពហុធា ប្រកបដោយមេគុណជាចំនួនពិត។ នៅទីនេះ គណិតវិទូ បានបង្កើតរបាយ ដែលអនុញ្ញាតឲ្យសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយផ្នែក មានចម្លើយខ្សោយ។

ប៉ុន្តែកិច្ចការនេះមិនទទួលបានរង្វាន់ប្រាក់លានដុល្លារ ដែលបានពិពណ៌នាខាងលើនោះទេ។ យើងសូមដកស្រង់ សម្ដីលោក Charles L.Fefferman ពិពណ៌នាពីរង្វាន់ នៅលើគេហទំព័រ Clay ដូចតទៅ « ... ការយល់ដឹងរបស់យើង គឺនៅកម្រិត Tab នៅឡើយ។ ម៉ូដែលស្តង់ដា ពីសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែលដោយផ្នែក មានមិនគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីដោះស្រាយបញ្ហា។ ផ្ទុយទៅវិញ យើងប្រហែលជាត្រូវការគំនិតជ្រៅថ្មីមួយចំនួន។ ប្រហែលជាសិស្សមួយក្នុងចំណោមសិស្សអ្នក នឹងអាចទម្លាយភាពទាល់ច្រកនៅថ្ងៃណាមួយ...»។

៥. សូមអានបន្ថែម ១-ខលទៅរកសមីការ Burger ខញ

ការអនុញ្ញាតឱ្យមានចម្លើយទោល តែក្នុងការអនុវត្តនៅតែមានទង្គុក! ក្នុងនាមជាអ្នកវិទ្យាសាស្ត្រម្នាក់ យើងមិនអាចបញ្ឈប់ការវិភាគត្រឹមនេះទេ"។ ភាពទោល គឺជាបាតុភូតដ៏សម្បូរ ហើយគណិតវិទូមិនមានជម្រើស ប៉ុន្តែពួកគេត្រូវមើលបញ្ហានេះដោយវ៉ែនតាគណិតសាស្ត្រ ហើយគិតឲ្យបានជ្រៅពីដំណើរនៃសមីការនេះ។ វិធីសាស្ត្រ នេះហៅថា ការណែនាំទូទៅ ឬដំណោះស្រាយខ្សោយ ដែលមិនរលូន។ ក្នុងករណីរបស់យើង រថយន្តមានល្បឿនខុសគ្នា អាចទង្គិចគ្នា។ ស្រមៃថាវាជាគំនរឡើងដ៏ធំនៃរថយន្ត ដែលមានល្បឿនពីខាងឆ្វេង ហើយ ទៅទង្គុកនឹងគំនររថយន្ត ដែលមានល្បឿនពីខាងស្ដាំ។ យើងចង់កំណត់ឱ្យ V(x,t) ដាច់តាម x មានលីមីតតែពីខាងឆ្វេង និងមួយទៀតពីខាងស្ដាំ។ ប៉ុន្តែ សមីការ នេះប្រើដេរីវេនៃ V។ ដើម្បីដោះស្រាយអ្វីទាំងអស់នេះ យើងត្រឡប់ទៅសតវត្សទី 19 ហើយប្រឌិតវិទ្យាសាស្ត្រ ឱ្យមានប្រភេទអនុគមន៍មួយ ដែលហៅថា អនុគមន៍ដែលតា។



រូបទី 5: អនុគមន៍ហ៊ីវីសាយ និងអនុគមន៍ដែលតា

ភាពវៀចវេរដ៏តូចមួយនៃអនុគមន៍ δ។

ពិចារណាពី អនុគមន៍ Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ b, & x = a, \\ 1, & x > a, \end{cases}$$

ដោយក្រាហ្វ នៅក្នុង រូបភាពទី 5។

ដេរីវេរបស់វាគឺ អនុគមន៍ដែលតា នៅត្រង់ចំណុច a។ គួរកត់សម្គាល់ថា ដេរីវេនេះបានមកពី

$$H'(x) = \delta(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ +\infty, & x = a, \\ 0, & x > a, \end{cases}$$

ដូច្នេះ វាមិនមែនជាអនុគមន៍ នៅក្នុងន័យទូទៅទេ ប៉ុន្តែវាជា «អនុគមន៍ដោយសន្មត»។

ប្រសិនបើទ្រឹស្តីជាមូលដ្ឋាននៃការគណនា នៅតែត្រូវ យើងបាន

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H'(x)\, dx = H(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 - 0 = 1,$$

ពោលគឺអនុគមន៍ដែលតានេះមានតម្លៃអនន្ត គឺពិតជាគ្រប់គ្រាន់ សម្រាប់ឱ្យ $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx$ ស្មើនឹង 1 ដែលជាផ្នែកខាងក្រោម «ក្រាហ្វ» នៃ δ គឺ 1! វិធីនេះត្រូវបានប្រើយ៉ាងទូលំទូលាយ ដោយរូបវិទូនា

សតវត្សទី 19 និងបានផ្តល់ចម្លើយត្រឹមត្រូវ ដូច្នេះ ការរាវរករបស់គណិតវិទូ ទាមទារការហ្មត់ចត់។ ទីបំផុត វាត្រូវបានធ្វើនៅក្នុង ទសវត្ស 1940 ដោយ លោក Laurent Schwartz ដែលគេហៅ«សត្វព្រៃ» នេះថា របាយ។

ដើម្បីធ្វើរឿងនេះ គាត់បាននិយាយថា របាយមិនមែនជាអនុគមន៍ $f(x)$ ដែលមានតម្លៃនៅត្រង់ចំណុច x ទេ ប៉ុន្តែវាជាតម្លៃមធ្យម ដែលអ្នកគិតពីអាំងតេក្រាលរបាយ ចំនួនដងប្រកបដោយអនុគមន៍ថ្លឹង (អនុគមន៍ក្នុងស្ថិតិវិទ្យា) ។ ឧទាហរណ៍ ក្នុងជីវិតពិត គឺការថតរូប ដោយម៉ាស៊ីនថត : អ្នកអាចវាស់ពន្លឺ ដែលមកប៉ះសែនស៊រ តែដោយសារសែនស៊រមានទំហំកំណត់ ដូចនេះ អ្នកមិនអាចវាស់ពន្លឺនៅទីតាំងអនន្តបានទេ។

ត្រឡប់ទៅរៀបរាប់ រលកកញ្ជក់របស់យើង

សំដៅទៅលើរូបទី 2 យើងសន្មត V ដាច់ កាត់ខ្សែបន្ទាត់ជិត នៅខាងស្តាំ ផ្នែកខាងលើ។ សមីការ burger នឹងនៅតែត្រូវ ប្រសិនបើអ្នកប្រើ អនុគមន៍ដែលតា និងធ្វើឱ្យ ការកញ្ជក់ខ្លួនឯងផ្លាស់ទីទៅកាន់មធ្យមនៃល្បឿនរថយន្ត ដែលទង្គុកពីខាងឆ្វេង និងពីខាងស្តាំ។ ជាការពិត បើពិនិត្យ នៅជិតចំណុច (x, t)នៅលើទីតាំងទង្គុក។ បើ s ជាល្បឿនរលកកញ្ជក់ ដូច្នេះ រលកកញ្ជក់ គឺ ជាបន្ទាត់ប៉ះទៅនឹង ខ្សែ $x = st + a$ ។ សមីការខាងលើអាចសរសេរជា $x - st = a$។ បន្ទាត់ ស្របទាំងអស់មានសមីការ $x - st = a'$ដែល $a' \in \mathbb{R}$។ នៅលើ មាត្រដ្ឋានតូចមួយ យើងអាចគិតថាល្បឿន (ប្រហែល) ថេរ នៅលើជ្រុងទាំងសងខាងនៃការកញ្ជក់នេះ ហើយវាមានតម្លៃ V_L នៅខាងឆ្វេងនៃការកញ្ជក់ និង V_Rនៅខាងស្តាំ។ ដូច្នេះយើងត្រូវបង្ហាញថា

$$s = \frac{V_L + V_R}{2}. \tag{4}$$

ដោយ V ថេរ នៅ សងខាងនៃការកញ្ជក់នេះ បន្ទាប់មក V គឺ ថេរនៅតាម ខ្សែ $x - st = a'$ ដែល $a' \in \mathbb{R}$ នោះ $V(x, t)$ អាស្រ័យតែលើតម្លៃនៃ $x - st$ ។ ប្រសិនបើយើង តាង $y = x - st$, យើងអាចសរសេរ $V(x, t) = \widetilde{V}(y)$ ជាអនុគមន៍នៃ(អថេរមួយ!) $\widetilde{V}$។

(ក្រាហ្វនៃអនុគមន៍នេះ មើល ឃើញជាខ្សែកោងចុងក្រោយ នៅក្នុងរូបទី 3) ដូច្នេះ $\widetilde{V}$ មានទម្រង់ $cH(y) + d$ ដែល H ជា អនុគមន៍ហ៊ីវីសាយនៅត្រង់ a, និង $c = V_R - V_L$។

គួរកត់សម្គាល់ថា $V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{1}{2}V^2)}{\partial x}$ អនុញ្ញាតឱ្យយើងសរសេរសមីការ Burger ជា

(5) $$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{1}{2}V^2)}{\partial x} = 0.$$

ដោយ $\frac{1}{2}V^2$ លោតទៅ $\frac{1}{2}(V_R^2 - V_L^2) = \frac{1}{2}(V_R - V_L)(V_R + V_L)$នោះអនុគមន៍ $\frac{1}{2}\widetilde{V}$ គឺមានទម្រង់ $\frac{1}{2}(V_R^2 - V_L^2)H(y) + e$។ ដូច្នេះ

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}\widetilde{V}^2\right)}{dy} = \frac{1}{2}(V_R^2 - V_L^2)\delta(y).$$

ដោយ $\frac{1}{2}V^2(x,t) = \frac{1}{2}\widetilde{V}^2(y)$តាមវិធានបណ្ដាក់ នោះ

(6) $$\frac{\partial\left(\frac{1}{2}V^2\right)}{\partial x} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\widetilde{V}^2\right)}{dy}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}(V_R^2 - V_L^2)\delta(y).$$

ដូចគ្នានេះដែរ

(7) $$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{d\widetilde{V}}{dy}\frac{\partial y}{\partial t} = (-s)\frac{d\widetilde{V}}{dy} = -s(V_R - V_L)\delta(y).$$

ជំនួស (6) និង(7) ក្នុង (5) គេបាន

$$\left[\frac{1}{2}(V_R - V_L)(V_R + V_L) - s(V_R - V_L)\right]\delta(y) = 0,$$

ដែលពិត លុះត្រាតែ (4) បានបំពេញ។

៦ អានបន្ថែម ២ - ម៉ូដែលលំហូរអង្គធាតុរាវក្នុងវិមាត្រ៣

យើងចង់ធ្វើជាម៉ូដែលលំហូរនៃទឹក ឬ ឱ្យទូទៅជាងនេះម៉ូដែលលំហូរនៃសារធាតុរាវមិនអាចបណ្ណែនបានណាមួយ។ យើងបាននិយាយ រួចហើយថា ទឹកនៅចំណុច $x \in \mathbb{R}^3$ នីមួយៗ ធ្វើចលនាដោយល្បឿន កំណត់ដោយ វ៉ិចទ័រ $V(x,t)$។ សមាសភាគទាំងបីនៃ V គឺជាអនុគមន៍មិនស្គាល់៣ ដែលយើងត្រូវការស្វែងរក។ ប៉ុន្តែតាមពិតទៅ យើងនឹងត្រូវការ អនុគមន៍ទីបួន គឺសម្ពាធ $p(x,t)$។ សម្ពាធគឺជាកម្លាំងដែលអាចឱ្យយានបន្លាស់ទីដីធ្វើការងារបាន: ស្នប់ បណ្ណែនប្រេង បន្តតាមទុយោ

ទៅពីស្តុង ដែល រុញទៅឃ្មៀសរុញ និងប៉ែលជីក (ត្រាក់ទ័រ) ជាដើម។ សម្ពាធអង្គធាតុរាវ កើតមកពីកម្លាំងសង្កត់ពីមជ្ឈដ្ឋានសងខាង។ ជាទូទៅអង្គធាតុរាវ ដូចជាទឹក និងប្រេង ជាដើម មិនអាចបណ្ណែនបានទេ ពោលគឺមិនផ្លាស់ប្តូរមាឌនៅពេលដែលត្រូវបណ្ណែន ខណៈពេលដែលឧស្ម័ន អាចបណ្ណែនបាន។ ឥឡូវនេះ ដើម្បីធ្វើជាម៉ូដែលនៃចលនាអង្គធាតុរាវមួយ យើងចាប់ផ្តើមពីចរាចរណ៍: សន្មតថាទឹករក្សាល្បឿនរបស់វា ស្របតាមពេលវេលា ប៉ុន្តែភាពខន់បានបន្ថយ ល្បឿននៅ រៀងរាល់ចំណុចដែលប៉ះជាមួយអង្គធាតុជិតខាង។ ការនេះអាចតាងដោយសមីការ (2) បើយើងហៅវាថា រ៉ិកទ័រ្យែល។

សម្រាប់ភាពខន់យើងត្រូវការវិមាត្រ៣ សម្រាប់បន្ថែមដេរីវេទីពីរ។ ឥឡូវនេះ ពាក្យនេះត្រូវបានគេសន្មតថា ជាការផ្លាស់ប្តូរអនុគមន៍ក្នុងទិសដៅ ដែលជាមធ្យមនៃតម្លៃសងខាង។ នៅលើផ្លូវមួយដែលអ្នកនៅចន្លោះគេពីរនាក់ ម្នាក់នៅពីក្រោយ មួយ ទៀតនៅពីមុខ។ នៅក្នុងវិមាត្របី ចូរគិតពីគូបមួយនៅក្នុងទឹកដែលនៅជុំវិញមានគូបជិតខាងប្រាំមួយ មួយ នៅពីឆ្វេង មួយនៅពីស្តាំ មួយនៅពីមុខមួយនៅពីក្រោយ មួយនៅពីលើ និងមួយ នៅពីក្រោម។ ក្នុងរឿងនេះ គឺជំនួសឱ្យការបន្ថែម តែវត្ថុមួយ $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ អ្នកត្រូវការបន្ថែមរបស់បីគឺ

$$\triangle V := \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2}$$

ជាកន្សោមដែលបានគេស្គាល់ថាជា ឡាប្លាសស៊ាននៃ V។

បញ្ហាមួយទៀត គឺថា លំហូរដែលតាងដោយសមីការនេះអាច បង្កើនឬ បន្ថយដង់ស៊ីតេទឹកដែលផ្ទុយពីការពិតដែលថា ទឹកគឺមិនអាចបណ្ណែនបាន។ អ្វីដែលយើងត្រូវការ គឺស្រមៃថា នៅចំណុចគូបតូចមួយ ដែលនៅចំណុចនេះបរិមាណទឹកចូលមកក្នុងគូប ស្មើបរិមាណទឹកដែលហូរចេញ។ មានវិធីសាមញ្ញបំផុតក្នុងសម្របនឹងបញ្ហានេះ: គឺ ឌីវែរសង់នៃ V ត្រូវស្មើសូន្យនៅគ្រប់ពេល។ ប្រសិនបើ $x = (x_1, x_2, x_3)$ហើយ $V = (V_1, V_2, V_3)$ នោះ

$$\operatorname{div}(V) := \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0.$$

ប្រសិនបើយើង គិតថាដេរីវេជាលីមីត ដូចនេះការបំបាត់ឌីវែរសង់មានន័យថា:

$$
\begin{aligned}
&V_1(x_1+\delta,x_2,x_3)-V_1(x_1-\delta,x_2,x_3)\\
&+V_2(x_1,x_2+\delta,x_3)-V_2(x_1,x_2-\delta,x_3)\\
&+V_3(x_1,x_2,x_3+\delta)-V_3(x_1,x_2,x_3-\delta)\to 0,
\end{aligned}
$$

ដែលមានន័យថា លំហូរទឹកចូល ដកលំហូរទឹកចេញតាមមុខទាំងប្រាំមួយនៃគូប ស្មើសូន្យ។

ទីបំផុត ដើម្បីធានាថា ស្ថិតនៅក្រោមលំហូរនេះ ឌីវេររសង់នៃ V នៅតែស្មើសូន្យ នោះយើងត្រូវបន្ថែមកម្លាំងមួយទៀត ដែលបង្កឡើង ពីការរុញគ្នារវាងម៉ូលេគុលទឹក ដើម្បីប្រឆាំងនឹងបណ្ណែន។ ការប្រឆាំងនឹងបណ្ណែន ត្រូវបានវាស់ដោយសម្ពាធនិងហ្គ្រាដ្យង់ នៃសម្ពាធនេះ ដែលកើនឡើងរាល់ដង ដើម្បីរក្សាដង់ស៊ីតេថេរ។

សមីការ Euler´s **និងសមីការ** Navier-Stoke

ឥឡូវនេះយើងបានត្រៀមខ្លួនរួចរាល់ហើយ ដើម្បីដាក់បញ្ហាទាំងអស់នេះរួមគ្នានៅក្នុង សមីការនៃ លំហូរ អង្គធាតុមិនអាចបណ្ណែនបាន។ សមីការ នេះ មាន អនុគមន៍មិនស្គាល់បួន ដែលត្រូវរក គឺ សមាសភាគបីនៃ V និង សម្ពាធ p ។ សម្ពាធត្រូវមាន វត្តមាន ដើម្បីធានានូវ ភាពមិនអាចបណ្ណែនបាន។ សមីការ Navier - Stoke គឺជា ប្រព័ន្ធបួនសមីការ

$$
\boxed{
\begin{gathered}
\frac{\partial V}{\partial t}+V\cdot\frac{\partial V}{\partial x}=-\nabla p+\nu\triangle V\\
\operatorname{div}(V)=0
\end{gathered}
}
$$

(នៅទីនេះ ∇p គឺគ្រាន់តែជាហ្គ្រាដ្យង់ p ពោលគឺ វិចទ័រ $\left(\frac{\partial p}{\partial x_1},\frac{\partial p}{\partial x_2},\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)$ ។ សញ្ញាដក នេះត្រូវបង្ហាញ នូវការដែ លថា ផ្នែកខាងឆ្វេង តំណាងឱ្យ សំទុះ។ ប្រសិនបើ សម្ពាធកើន នោះ x បន្ថយ ឬសំទុះអវិជ្ជមាន។ ក្នុងករណីពិសេស ដែល ភាពខន់ $\nu=0$ គេហៅថាសមីការ *Euler*។ នៅក្នុងវិមាត្រ១ ភាពបណ្ណែនមិនបានបញ្ជាក់ថាល្បឿនថេរ ដូចនេះពុំមានការកញ្ឆក់ទេ។ វាត្រូវបានគេ បង្ហាញថា មិនមានការកញ្ឆក់ផងដែរ នៅក្នុងវិមាត្រ ២ ដោយកំណត់អនុគមន៍ល្បឿនដំបូង ហើយទទួលបានចម្លើយតែមួយគត់សម្រាប់ពេលវេលាអនន្ត។ នៅក្នុងវិមាត្រ ៣វិញ ដោយគ្មានអំពើនៃល្បឿន, លទ្ធភាពវិវឌ្ឍដើម្បីទទួលបានភាពដោយឡែក នឹងកាន់តែពិបាក - ប៉ុន្តែ គ្មាននរណាម្នាក់ដឹងច្បាស់ទេ។

៧ ឯកសារយោង

1. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Alexandre Chorin and Jerrold Marsden, Springer 1993.

2. Wikipedia article http://en.wikipedia.org/wiki/Burgers'_equation.

3. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Lokenath Debnath, Birjauser-Boston, 2004.