អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី Klein Project Blog

ទ្រឹស្តីបទ បាល់មានសក់

The Hairy Ball Theorem

អ្នកនិពន្ធដើម: *João Pimentel Nunes*

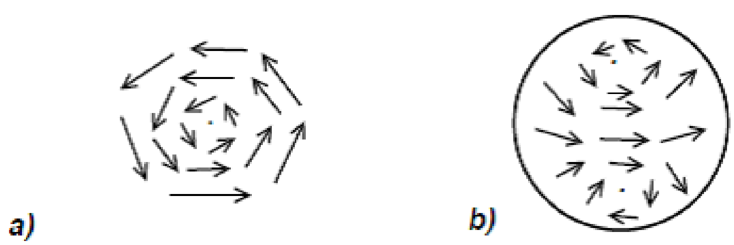
ទ្រឹស្តីបទ **បាល់មានសក់** មានប្រភពពី **តូប៉ូឡូជី** ដែលជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យាដែលសិក្សាពីទម្រង់នៃលំហ។ ភាគច្រើន លទ្ធផលនេះ មានប្រភពចេញមកពីស្នាដៃ នៅចុងសតវត្សទី១៩ របស់លោក ហង់រី ព័ងការ៉េ (Henri Poincaré) ដែលសន្មតជាមនុស្សម្នាក់ក្នុងចំណោមអ្នកដែលបានបង្កើត តូប៉ូឡូជី។

មានលទ្ធផលគណិតវិទ្យាមួយចំនួន ដែលយើងជួបប្រទះក្នុងក្នុងស្ថានភាពប្រចាំថ្ងៃ ដូចជារៀងរាល់ព្រឹក អ្នកអានជាច្រើនប្រឈមមុខនឹងទ្រឹស្តីបទ បាល់មានសក់ នៅពេលដែលពួកគេ ព្យាយាមសិតសក់ ហើយរកឃើញថា មានសក់ជំពាក់នៅលើក្បាលរបស់គេ។ បើពោលដោយសាមញ្ញ ទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់ពោលថា « មិនអាចទៅរួចទេដើម្បីឱ្យយើងសិតសក់ នៅលើស្វ៊ែរដោយមិនឱ្យមានជំពាក់នោះ»។

កិច្ចការទីមួយរបស់យើងគឺត្រូវពន្យល់ពាក្យ "សក់", "ក្រាស" និងពាក្យ "កំណួចជំពាក់" ក្នុងន័យគណិតវិទ្យា។ សន្មតថាយើងមានផ្ទៃ S មួយនៅក្នុងលំហអឺគ្លីតវិមាត្របី R^3។ គ្រប់ចំណុច p នីមួយៗនៅលើផ្ទៃ S មានប្លង់ប៉ះមួយនឹងផ្ទៃ S។ គេថា វ៉ិចទ័រទាំងឡាយនៅក្នុងប្លង់នេះ ដែលមានគល់ត្រង់ p ប៉ះទៅនឹងផ្ទៃ S ត្រង់ p។ ពាក្យគណិតវិទ្យាដែលសមមូលនឹងពាក្យ "សក់" គឺ វ៉ិចទ័រប៉ះទាំងនេះឯង។ "ម៉ូតសក់តាមន័យគណិតវិទ្យា" នៅលើផ្ទៃ S គឺជាជម្រើស (ចំពោះចំណុច p នីមួយៗនៃ S) នៃវ៉ិចទ័រប៉ះមួយនៃ S ត្រង់ p (តាងដោយ Xp) ដែលវ៉ិចទ័រទាំងនេះ ខុសៗគ្នា និង នៅជាប់គ្នានៅលើផ្ទៃ S។ មានន័យថា នៅពេលដែលចំណុច p និង q ខិតជិតគ្នា នោះ ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រ Xp និង Xq ក៏ខិតជិតគ្នាដែរ ហើយមុំរវាងវ៉ិចទ័រទាំងពីរខិតជិតសូន្យ។ ជម្រើសបែបនេះនៃម៉ូតសក់ (គឺសំណុំ X នៃវ៉ិចទ័រប៉ះ Xp នៅលើផ្ទៃ S) ហៅថា ដែនវ៉ិចទ័រជាប់ *(continuous vector field[1])* លើ S។ បើនៅត្រង់ចំណុច p ណាមួយនៃផ្ទៃ S មានវ៉ិចទ័រ Xp = *o* នោះ គេថា p ជាចំណុចសូន្យ នៃសំណុំ X។ នេះគឺសមមូលនឹងពាក្យ "កំណួចជំពាក់"។

ឥឡូវយើងអាចថែងទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់ ឱ្យកាន់តែច្បាស់៖ "ដែនវ៉ិចទ័រជាប់លើផ្ទៃ S រាងស្វ៊ែមួយយ៉ាងហោចណាស់ មានវ៉ិចទ័រសូន្យមួយ"។

កំណួចជំពាក់ដែលទាក់ទងនឹងសំណុំវ៉ិចទ័រ X ត្រូវបានបង្ហាញតាមបែបគណិតវិទ្យាដោយវ៉ិចទ័រសូន្យនៃសំណុំ X។ ឧទាហរណ៍ បើសំណុំ X មានកំណួចជំពាក់ធម្មតាមួយនៅជុំវិញចំណុច p (ដូចក្នុងរូប 1a) នោះ Xp = *o*។ នៅពេលខិតជិតផ្ចិតនៃកំណួចជំពាក់ វ៉ិចទ័រទាំងអស់អាចមានទិសដៅគ្រប់លទ្ធភាពនៅពេលវ៉ិចទ័រទាំងនោះនៅជុំវិញចំណុច p។ តាមរបៀបតែមួយគត់ដែលវ៉ិចទ័រទាំងនោះខិតជិតវ៉ិចទ័រ Xp នៅពេលដែល X ជាប់នៅត្រង់ p ព្រមគ្នា គឺប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រទាំងអស់ត្រូវថយចុះរហូតដល់សូន្យនៅត្រង់ p។ ដូច្នេះ ទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់ព្យាករណ៍ថា «ដែនវ៉ិចទ័រជាប់លើផ្ទៃរាងស្វ៊ែ នឹងបង្កើតបាននូវកំណួចជំពាក់»។



រូបទី 1 a) គំនួចជំពាក់ដែលមានផ្ចិតត្រង់សូន្យនៃ X; b) ដែនវ៉ិចទ័រជាប់នៃស្វ៊ែរមានកំណួចជំពាក់ពីរ

[1] vector field: ជាអនុគមន៍ ដែលមានដែនកំណត់ជាសំណុំចំណុចក្នុលំហវិមាត្រពីរ ឬ បី និង មានសំណុំរូបភាពជាវ៉ិចទ័រក្នុងលំហវិមាត្រពីរ ឬ បី។

ទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់ កំណត់នូវគុណលក្ខណៈរបស់ដែនវ៉ិចទ័រ X។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ជាឧទាហរណ៍ ប្រវែងនៃវ៉ិចទ័រមិនសំខាន់ទេ។ យើងក៏អាចពិនិត្យផងដែរថា វាផ្ទៀងផ្ទាត់ចំពោះផ្ទៃណាដែល សមមូលតាមបែបតូប៉ូវិទ្យាទៅនឹង ផ្ទៃរាងស្វ៊ែ មានន័យថា ផ្ទៃដែលជាបម្លែងជាប់របស់ផ្ទៃរាងស្វ៊ែ។ (ស្រមៃទៅដល់ផ្ទៃរាងស្វ៊ែមួយដូចជាបាល់កៅស៊ូ ដែលយើងអាចធ្វើបម្លែងរូបដោយដៃ ដោយច្របាច់ ឬ មូលផ្នែកមួយចំនួន ប៉ុន្តែមិនធ្វើឱ្យវាបែកនោះទេ។ ដូច្នេះ បើតាមទស្សនៈតូប៉ូវិទ្យា ផ្ទៃដែលទទួលបានគឺដូចទៅនឹងផ្ទៃស្វ៊ែ។) ទ្រឹស្តីបទនេះ ផ្អែកតែលើគុណលក្ខណៈ (គុណលក្ខណៈតូប៉ូ) នៃផ្ទៃប៉ុណ្ណោះ។ នេះគឺជាលក្ខណៈ មួយ នៃតូប៉ូវិទ្យា ហើយក៏ជាហេតុផលមួយក្នុងចំណោមហេតុផលជាច្រើន សម្រាប់ការអនុវត្តដ៏ទូលំទូលាយ របស់វាក្នុងផ្នែកជាច្រើននៃគណិតវិទ្យា ជាឧទាហរណ៍ ពតិមានតូប៉ូនៃលំហមួយ មិនទាក់ទងនឹងបរិមាណលក្ខណៈទេ ដូចជាផ្ទៃក្រឡា ឬ ភាពស៊ីមេទ្រីជាដើម។

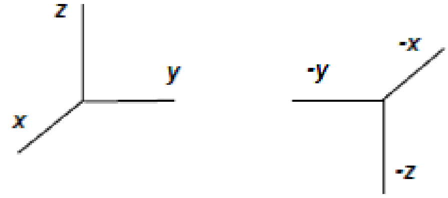
យើងនឹងពណ៌នានូវគំនិតមួយ ដែលពន្យល់ទ្រឹស្តីបទ បាល់មានសក់[2,3]។ យក S ជាផ្ទៃរាងស្វ៊ែមួយ ដែលមានផ្ចិតឋិតនៅត្រង់គល់តម្រុយនៃលំហវិមាត្របី R^3 នោះ ចំណុច – p ជាចំណុចឆ្លុះនៃចំណុច p ធៀបនឹងគល់តម្រុយ។ យក X ជាដែនវ៉ិចទ័រជាប់នៅលើផ្ទៃ S។ យើងចង់បង្ហាញថា X សូន្យ នៅត្រង់ចំណុចណាមួយនៃ S។ សន្មតផ្ទុយថា X មិនអាចសូន្យទេ។

នៅត្រង់ចំណុច p មួយនៃ S មានខ្សែបណ្តោយមួយដែលមានទិសដូចវ៉ិចទ័រ Xp ព្រោះវ៉ិចទ័រ Xp មិនសូន្យ។ ឥឡូវស្រមៃថា ចំណុច p នីមួយៗមានចលនាតាមខ្សែបណ្តោយ ដោយល្បឿនដូចគ្នាទាំងអស់ចំពោះគ្រប់ចំណុច។ មួយរយៈពេលក្រោយមក គ្រប់ចំណុចទាំងអស់ទៅដល់ចំណុចឆ្លុះ – p របស់វាដូចៗគ្នា។ ដូច្នេះ យើងរកបាននូវក្រុមនៃបម្លែងផ្ទៃ S ទៅខ្លួនឯងដដែល ដូចនេះវាជាបម្លែងខ្លួនឯង។ នៅខណៈពេលដើម t = 0 ចំណុច p នីមួយៗនៃ S ប្តូរទៅជាចំណុច p ខ្លួនឯងដដែល ដូច្នេះ ផ្ទៃ S រងនូវអនុគមន៍បម្លែងឯកលក្ខណៈ[2]។ នៅពេលដែលរយៈពេល t កើន ចំណុច p នីមួយៗនៅលើផ្ទៃ S ចាប់ផ្តើមផ្លាស់ទីតាមខ្សែបណ្តោយ ដែលភ្ជាប់ចំណុច p ទៅចំណុច –p តាមទិសនៃវ៉ិចទ័រ Xp។ នៅខណៈពេលចុងក្រោយ ចំណុច p ទៅដល់ចំណុចឆ្លុះ–p របស់វា។ អនុគមន៍បម្លែងនេះ ហៅថា អនុគមន៍បម្លែងអង់ទីប៉ូដ (antipodal transformation)។ ដូច្នេះ យើងអាចបន្តប្តូរពីបម្លែងឯកលក្ខណៈទៅជា អង់តីប៉ូដ។ ឥឡូវគេអាចបង្ហាញថាការប្តូរបែបនេះមិនអាចមាននោះទេ ពីព្រោះ បម្លែងអង់ទីប៉ូដ ប្តូរទិសដៅនៃ S។ ដោយសារការប្តូរបែបនេះគ្មាន នោះសម្មិតកម្មដើម ដែលថា X មិនអាចសូន្យនោះ មិនពិត នេះជាការស្រាយបញ្ជាក់ទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់ ដូចដែលបានពោលមកខាងដើម។

ដើម្បីពន្យល់ន័យនៃពាក្យ «ទិសបញ្រ្ចាស» តាមរបៀបក្រៅផ្លូវការ ចូរប្រៀបធៀបរវាងបម្លែងឯកលក្ខណៈនៃលំហ R^3 ដែលចំណុចនីមួយៗ ប្តូរទៅជាចំណុចខ្លួនឯង ហើយបម្លែងពីចំណុច p ទៅចំណុច –p។ ក្នុងរូបទី២ យើងបង្ហាញពីបម្លែងអ័ក្សដើមនៅខាងឆ្វេង ទៅជាលទ្ធផលនៃអ័ក្សបន្ទាប់ពីបម្លែង p ទៅ –p។

អ្នកអានទាំងអស់អាចយល់ដោយងាយថា គេមិនអាចបង្វិល ប្រព័ន្ធតម្រុយ (x, y, z) ឱ្យបានជាប្រព័នតម្រុយ $(-x,-y,-z)$ នោះទេ។ នេះមានន័យថា បម្លែងពី p ទៅ –p បញ្រ្ចាសទិសនៃ R^3។ ដូចគ្នានេះដែរ ចំពោះបម្លែងអង់ទីប៉ូដនៃផ្ទៃ S។

ទស្សនៈគណិតវិទ្យាដែលជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការពន្យល់ឱ្យមានការគិតដោយខ្លួនឯងនេះ គឺជាអូម៉ូតូប

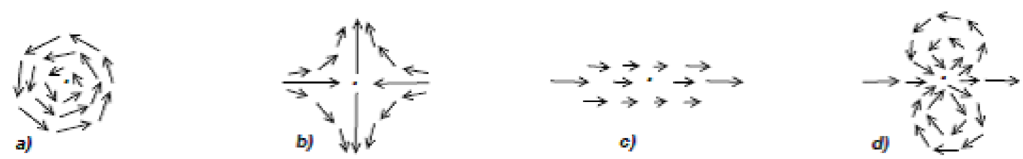


[2] In mathematics, an **identity function**, also called an **identity relation** or **identity map** or **identity transformation**, is a function that always returns the same value that was used as its argument. In terms of equations, the function is given by $f(x) = x$.

(អនុគមន៍ពីរដែលជាអនុគមន៍ជាប់ក្នុងរងវង់លំហាតូប៉ុតែមួយ) និង ដឺក្រេតូប៉ុតែមួយ។ គេថាបម្លែងពីរនៃ S អូម៉ូតូប ប្រសិនបើពួកវាត្រូវបានធ្វើបម្លែងរូបពីមួយទៅមួយបាន។ ឧទាហរណ៍ បម្លែងវិលពីរនៃ S អាចត្រូវបានធ្វើបម្លែងរូបពីមួយទៅមួយ ដោយប្តូរមុំរង្វិល និង អ័ក្សរង្វិល។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ចំពោះបម្លែងមួយនៃផ្ទៃ S ទៅជាផ្ទៃ S ខ្លួនឯង យើងអាចកំណត់នូវចំនួនគត់មួយ ដែលជាដឺក្រេរបស់វា។ ដឺក្រេនៃបម្លែងឯកលក្ខណៈនិងអង់ទីប៉ូដគឺ +1 និង –1 រៀងគ្នា។ ដឺក្រេនៃបម្លែង S មួយមិនប្រែប្រួលក្នុងអំឡុងពេលធ្វើបម្លែងជាប់ទេ ព្រោះវាមិនអាច«លោត» ទៅតម្លៃផ្សេងទៀត នៅពេលធ្វើបម្លែងជាប់នោះទេ។ ដូច្នេះ បម្លែងអូម៉ូតូបពីរនៃ S មានដឺក្រេដូចគ្នា ហើយបម្លែងឯកលក្ខណៈ និងអង់ទីប៉ូដមិនអូម៉ូតូបនឹងគ្នាទេ។ ដូចដែលយើងបានឃើញ ដែនវិចទ័រដែលគ្មានវិចទ័រសូន្យ នៅលើផ្ទៃ S នឹងមានលក្ខណៈអូម៉ូតូប ដូចនេះវាមិនអាចមាននោះទេ។ ហេតុផលប្រភេទនេះទាក់ទងនឹងបរិមាណអរូបី ក្ុនងករនីនេះគឺ ដឺក្រេ កើតឡើងជាញឹកញាប់នៅក្នុងតូប៉ូវិទ្យា។

ទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់ ក៏ជាវិបាកនៃ ទ្រឹស្តីបទទូទៅរបស់ ព័ងការ៉េ ស្តីពីដែនវិចទ័រនៅលើផ្ទៃ។ សន្មត X វិចទ័រជាប់ នៅលើផ្ទៃ ដែលមានវិចទ័រសូន្យមួយនៅត្រង់ p មានន័យថា p ជាចំណុចតែមួយគត់ នៅក្នុងរង្វង់នេះដែល X សូន្យ។ យើងអាចកំណត់បាននូវ អាំងដិចរបស់ចំណុច p ដែលជាចំនួនគត់ $i_p(X)$ កំណត់ចំនួនរង្វិល X ជុំវិញចំណុច p ដូចខាងក្រោមនេះ។

យើងចាប់ផ្តើមដោយកំណត់តំបន់តូចមួយនៅលើផ្ទៃជុំវិញចំណុច p ដែលជាតំបន់ប្លង់។ យើងបានបរិមាត្រ C តូចមួយនៅជុំវិញចំណុច p ដែល X មិនអាចសូន្យទេនៅក្នុងបរិមាត្រ C។ បើយើងរំកិលតាមបរិមាត្រ C ចេញពីចំណុចណាមួយ និង តាមទិសដៅដែលជ្រើសរើសណាមួយនោះ យើង នឹងអាចសង្កេតនូវបម្រែបម្រួលទិសដៅនៃ X។ នៅពេលយើងត្រឡប់មកចំណុចចាប់ផ្តើមវិញ X កំណត់បាននូវចំនួនជុំដាក់លាក់មួយ។ ជុំនីមួយៗដែលវិលតាមទិសដៅកំណត់ រាប់ថា +1 ហើយជុំដែលវិលផ្ទុយពីទិសដៅកំណត់ រាប់ថា –1។ ចំនួនជុំសរុប គឺជា អាំងដិច $i_p(x)$។ អ្នកអានអាចធ្វើរឿងនេះចំពោះឧទាហរណ៍ខាងក្រោម ហើយ បញ្ជាក់តម្លៃ អាំងដិច ដែលបានបង្ហាញ។



រូបទី ៣: សូន្យវិចទ័រដែលមានអាំងដិច a) +1, b) -1, c) 0, d) +2

អាំងដិច $i_p(X)$ គឺជាគោលការណ៍តូប៉ូមួយ ដែលផ្អែកតែទៅលើ លក្ខណៈបិមាណនៃ X ជិតចំណុច p។ តាមពិត គំនិតរបស់ ព័ងការ៉េបានបង្ហាញជំបូងក្នុងអត្ថបទមួយ ដែលនិយាយអំពី លក្ខណៈគុណភាពនៃសមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល។

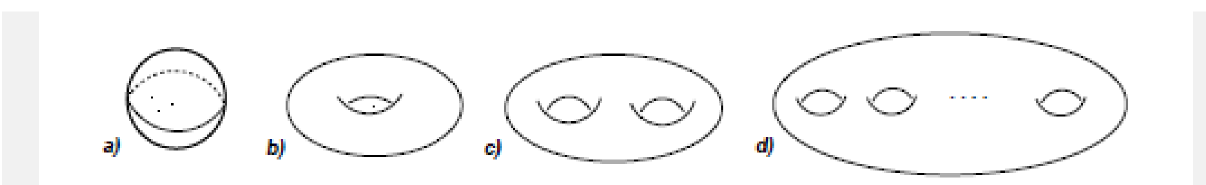
សន្មតថា X ជាដែនវិចទ័រ លើផ្ទៃរាងស្វ៊ែ S ដែលមានវិចទ័រសូន្យនៅដាច់ពីគ្នាត្រង់ ចំណុច $p_1, p_2, ..., p_n$។ យក $\chi(X) = i_{p1}(X) + i_{p2}(X) + \cdots + i_{pN}(X)$ ជាផលបូកនៃ អាំងដិច របស់គ្រប់វិចទ័រសូន្យនៃ X។ ជាការពិតគួរកត់សម្គាល់ថា (ដែលនឹងធ្វើឱ្យអ្នកអានភ្ញាក់ផ្អើល) ដែលចំនួនគត់ $\chi(X)$ មិនអាស្រ័យនឹង X។ មានន័យថា បើ Y ជាដែនវិចទ័រជាប់មួយទៀតលើផ្ទៃ S ដែលមានវិចទ័រសូន្យត្រង់ $q_1, q_2, ..., q_n$ នោះ $c(Y) = i_{q1}(X) + i_{q2}(X) + \cdots + i_{qk}(X) = \chi(X)$។ ឧទាហរណ៍ យកផ្ទៃ S ជាមួយនឹងដែនវិចទ័រមួយដែលមានវិចទ័រសូន្យពីរ ប្រកបដោយអាំងដិច +1 ដូចក្នុងរូប 1b វិចទ័រសូន្យមួយនៅប៉ូលខាងត្បូង និង វិចទ័រសូន្យមួយទៀតនៅប៉ូលខាងជើង ដែលផលបូកអាំងដិច ស្មើនឹង +2។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍មួយផ្សេងទៀត យើងអាចមានតែវិចទ័រសូន្យតែមួយ ដែលមានអាំងដិច +2 ដូចក្នុងរូប 3d។ អ្នកអានអាចព្យាយាមគូរ ដែនវិចទ័រ ជាប់ផ្សេងទៀត ដែលមានវិចទ័រសូន្យនៅលើផ្ទៃរាងស្វ៊ែ។ ផលបូកនៃ អាំងដិច ស្មើនឹង +2 ជានិច្ច។ ដូច្នេះនាំឱ្យគេបានទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់: បើផលបូកអាំងដិចរបស់វិចទ័រសូន្យនៃ S ស្មើនឹង +2 នោះ ត្រូវតែមានវិចទ័រសូន្យ។

យើងនឹងពន្យល់ពីលទ្ធផលនេះ។ សន្មតថា ផ្ទៃ S បង្កើតឡើងដោយត្រីកោណ ដែលភ្ជាប់គ្នាដោយសារជ្រុង ដែលជ្រុងនីមួយៗ ភ្ជាប់តែត្រីកោណពីរគត់។ យើងសន្មតថា វ៉ិចទ័រសូន្យនៃ X និង Y ឋិតនៅក្នុងត្រីកោណ ដែលត្រីកោណនីមួយៗ អាចមានវ៉ិចទ័រសូន្យនៃ X ឬ Y យ៉ាងច្រើនមួយ។ ដាក់ត្រីកោណនៅលើបាល់រាងស្វ៊ែ ដូច្នេះ ហើយ ស្រមោចតូចមួយដែលដើរតាមជ្រុងនៃត្រីកោណនៅផ្នែងខាងក្រៅនៃបាល់ មានផ្នែងខាងក្នុងនៃត្រីកោណនៅខាងឆ្វេងវា។ បើជ្រុងមួយនៃត្រីកោណភ្ជាប់ត្រីកោណពីរនៅជិតគ្នា T និង T′ នោះ ស្រមោចដើរក្នុងទិសដៅផ្ទុយ អាស្រ័យថាតើ វាដើរជុំវិញ T ឬ T′។

ត្រង់ចំណុច p នីមួយៗនៅលើជ្រុងមួយ យើងអាចវាស់មុំរវាងវ៉ិចទ័រ Xp និង Xq ដែលផ្លាស់ប្តូរទៅតាមបណ្តោយជ្រុង។ បើមុំនេះខុសគ្នា α រវាងចំណុចដើម និង ចុងនៃជ្រុង នៅពេលស្រមោចវារតាមទិសដៅមួយ នោះ វានឹងខុសគ្នា $-\alpha$ នៅពេលដែលស្រមោចវាតាមទិសដៅផ្ទុយ។ ដូច្នេះ បើយើងបូកបម្រែបម្រួលមុំ តាមបណ្តោយជ្រុងទាំងអស់ នៃគ្រប់ត្រីកោណទាំងអស់ នោះយើងនឹងទទួលបានតម្លៃសូន្យ ព្រោះជ្រុងនីមួយៗ ត្រូវស្រមោចវាពីរដង ម្តងតាមទិសដៅមួយ និង ម្តងទៀតតាមទិសដៅមួយផ្សេងទៀត។ ជាមួយលទ្ធផលនេះ អ្នកអានអាចជឿជាក់ថា ផលបូកសូន្យនេះក៏ស្មើទៅនឹង $2\pi[\chi(X)-\chi(y)]$ ផងដែរ។ តាមពិត បើ X និង/ឬ Y មានវ៉ិចទ័រសូន្យនៅខាងក្នុងត្រីកោណមួយ នោះផលបូកបម្រែបម្រួលសរុបនៃមុំរវាង X និង Y តាមបណ្តោយជ្រុងទាំងបី ច្បាស់ណាស់ថាស្មើនឹង 2π គុណនឹង ផលដករវាងអាំងដិចរបស់ X និង Y ចំពោះវ៉ិចទ័រសូន្យទាំងនោះ។ (ព្រោះអាំងដិចជាចំនួនជុំដែលដែនវ៉ិចទ័រធ្វើបាន នៅពេលវិលជុំវិញចំណុច p។ អ្នកអាចពិនិត្យថា បើ X និង Y មិនមានវ៉ិចទ័រសូន្យនៅខាងក្នុងត្រីកោណ ផលបូកបម្រែបម្រួលមុំសរុបតាមបណ្តោយជ្រុងទាំងបីនឹងស្មើសូន្យ។ ជាមួយគ្នាដែរ យើងអាចកំណត់ $i_p(X) = 0$ បើ $Xp \neq 0$។ ដូច្នេះ $\chi(X) = \chi(Y)$ ដូចបានបង្ហាញខាងលើ។

យើងសន្និដ្ឋានថា បើមានដែនវ៉ិចទ័រជាប់មួយនៅលើផ្ទៃរាងស្វ៊ែ ដែលផលបូកអាំងដិចនៃវ៉ិចទ័រសូន្យរបស់វា គឺ +2 នោះ វាពិតចំពោះគ្រប់ដែនវ៉ិចទ័រ ជាប់ទាំងអស់នៅលើផ្ទៃនេះ ដែលនាំឱ្យយើងទាញបាននូវទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់។

ប្រធានបទដែលយើងបានពិណ៌នា មិនត្រឹមតែអនុវត្តចំពោះផ្ទៃរាងស្វ៊ែប៉ុណ្ណោះទេ តែអនុវត្តចំពោះគ្រប់ផ្ទៃទាំងអស់នៅក្នុងរូបទី ៤ ដែលយើងហៅថាផ្ទៃមានទិសដៅ (orientable surfaces[3])។ ជំនួសឱ្យផ្ទៃរាងស្វ៊ែ ផ្ទៃS អាចជាផ្ទៃនំកង(ដូណាត់) ដែលក្នុងតូប៉ូវិទ្យាហៅថា torus ឬក៏ផ្ទៃផ្សេងទៀតដែលមាន g = 2, 3, ... ដែល g ចំនួនរន្ធ។



រូបទី៤ 4: ក្រុមនៃផ្ទៃបិទមានទិសដៅ: a) ស្វ៊ែរ b) កង, c) និង g = 2, d) g > 2

វាមិនពិបាកទេក្នុងការបង្ហាញថា បើ S មានរន្ធចំនួន g នោះផលបូក អាំងដិច នៃវ៉ិចទ័រសូន្យរបស់ដែនវ៉ិចទ័រជាប់នៅលើផ្ទៃ S ស្មើទៅនឹងលក្ខណៈ អឺលែរ (Euler characteristic[4]) នៃផ្ទៃ S គឺ 2 – 2g។ គួរកត់សម្គាល់ផងដែរថា $i_p(X)$ អាស្រ័យតែលើលក្ខណៈធៀបនៃ X ជិត p ចំណែងឯង $\chi(X)$ អាស្រ័យទៅលើរាងទូទៅរបស់ S។ ក្នុងករណីជាស្វ៊ែ g = 0 ដូច្នេះ ផលបូកនៃ អាំងដិច គឺ +2។ ក្នុងករណីជា នំកង(ដូណាត់) (torus) g = 1 ហើយអ្នកអានអាចស្វែងរកដែនវ៉ិចទ័រជាប់មិនសូន្យបានយ៉ាងងាយ។ បើធ្វើឱ្យប្រធានបទនេះ

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Orientable_surface
[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler_characteristic

មានលក្ខណៈទូទៅបន្តិច គេអាចបង្ហាញថា ទ្រឹស្តីបទនេះ ក៏អនុវត្តបានចំពោះផ្ទៃផ្សេងទៀតដូចជា ប្លង់ចំណោល (projective plane[5]) និង ដបក្លេន (Klein bottle[6])។

ក្រោយមក នៅឆ្នាំ 1926 គណិតវិទូសញ្ជាតិអាឡឺម៉ង់ឈ្មោះ ហៃនស៍ ហុបហ្វ (Heinz Hopf) បានធ្វើឱ្យទ្រឹស្តីបទព័ងការ៉េនេះ មានលក្ខណៈទូទៅចំពោះផ្ទៃនៃរូបធរណីមាត្រ ក្នុងលំហាវិមាត្រលើសពីពីរ។ លទ្ធផលនេះ បង្ហាញពីលក្ខណៈពិសេសរបស់តូប៉ូវិទ្យា ដែលត្រូវបានអភិវឌ្ឍយ៉ាងខ្លាំង ក្នុងសតវត្សទី២០។ វាត្រូវបានយកមកអនុវត្ត ដោយមានឥទ្ធិពលយ៉ាងខ្លាំងក្នុងផ្នែកជាច្រើននៃគណិតវិទ្យា ដូចជា ធរណីមាត្រវិភាគ ប្រព័ន្ធឌីណាមិច និង សមីការឌីផេរ៉ង់ស្យែល និង ត្រូវបានប្រើដើម្បីកំណត់នូវលក្ខណៈគុណភាព និង លក្ខខណ្ឌទូទៅនៃបញ្ហា។

យើងអាចតាងកំណត់ម៉ូដែលនៃល្បឿនខ្យល់(វិលជុំវិញផែនដីដែលមានរាងស្វ៊ែរ) ក្នុងបរិយាកាសត្រង់រយៈកម្ពស់ណាមួយ ដោយដែនវ៉ិចទ័រជាប់ នៅលើផ្ទៃនៃស្វ៊ែមួយ។ ទ្រឹស្តីបទបាល់មានសក់ព្យាករណ៍ នូវអត្ថិភាពនៃវ៉ិចទ័រសូន្យ និង ចលនាខ្យល់ដូចជាព្យុះស៊ីក្លូន នៅក្នុងចលនានៃបិរយាកាស។ ដូចគ្នាដែរ ទ្រឹស្តីបទបនេះ ក៏អនុវត្តទៅលើចលនានៃ ឧស្ម័នក្តៅអុលត្រា ក្នុងស្រទាប់បរិយាកាសព្រះអាទិត្យ ដែលបង្កើតនូវចលនាខ្យល់កួចដ៏សម្បើម។ ផ្នែកនៃសម្រស់ របស់ភាសាគណិតវិទ្យា បានមកពីការពិពណ៌នាបញ្ចូលគ្នានៃបាតុភូតក្នុងធម្មជាតិ ក៏ដូចជាម៉ូតសក់របស់យើងនាពេលព្រឹក ប្រៀបនឹង បរិយាកាសជុំវិញព្រះអាទិត្យ តាមរយៈសំណុំទស្សនៈដូចគ្នា បង្កើតជាភាពសំខាន់ដ៏អស្ចារ្យ ទាំងក្នុងពិភពពិត(រូបី) និងអរូបី។

ប្រែសម្រួលដោយៈ វ៉ៃ សុភ័ក្ត និង ពិន វន្នី

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_plane
[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Klein_bottle