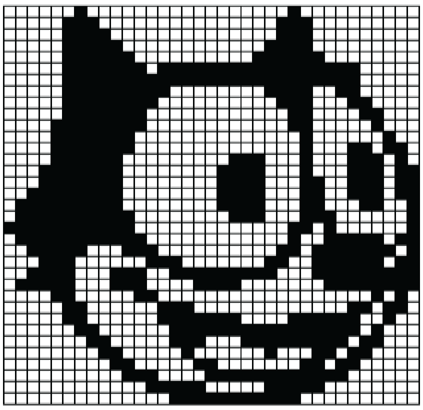
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

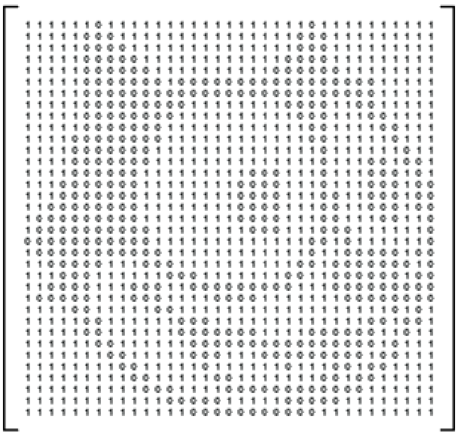
Klein Project Blog

រូបភាពម៉ាទ្រីសនិងរូបភាពឌីជីថល *(Matrices and Digital Images)*

រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ:Dirce Uesu Pesco និង Humberto José Bortolossi

រូបភាពដែលអ្នកឃើញនៅលើទំព័រអ៊ិនធឺណែត និងរូបថតដែលថតដោយទូរស័ព្ទដៃរបស់អ្នក គឺជាគំរូនៃរូបភាពឌីជីថល។ យើងអាចតាងប្រភេទនៃរូបភាពនេះដោយម៉ាទ្រីស។ ឧទាហរណ៍: រូបតូចនៃ ឆ្មាហ្វេលីក (*Felix the Cat*) (រូបខាងឆ្វេង) គឺអាចតាងដោយម៉ាទ្រីស 35×35 ដែលធាតុនីមួយៗរបស់វា តាងដោយលេខ **0** និងលេខ **1**។ លេខទាំងនេះ គឺបញ្ជាក់ពីពណ៌របស់ភិចសិុលនីមួយៗ របស់រូបភាព (ភិចសិុល គឺជាធាតុតូចបំផុតនៃក្រាហ្វិករបស់រូបភាព ម៉ាទ្រីស (*Matrices Images*) ដែលអាចកំណត់ពណ៌តែមួយគត់) ដែលលេខ **0** កំណត់ឱ្យពណ៌ខ្មៅនិងលេខ **1** កំណត់ឱ្យពណ៌ស។ រូបភាពឌីជីថលដែលប្រើពណ៌តែពីរបែបនេះ ត្រូវបានគេហៅថារូបបាយណារី ឬរូបប៊ូលៀន (*Binary Images or Boolean Images)*។



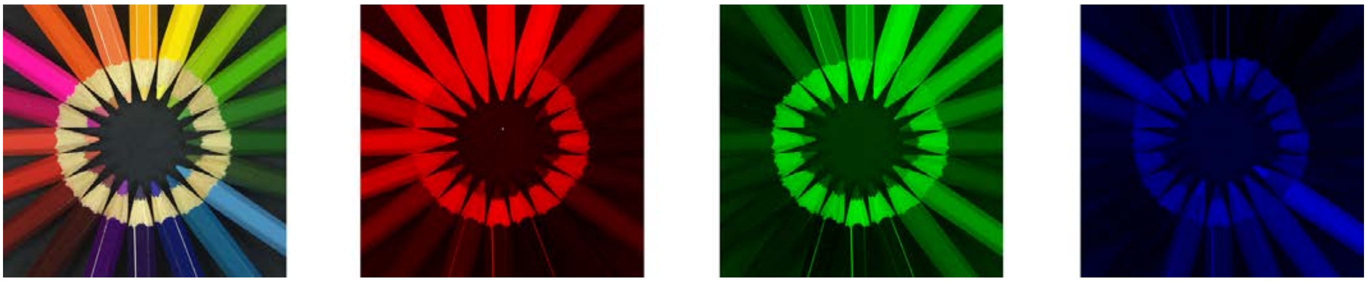


35x35

រូបភាព2: ម៉ាទ្រីសត្រូវគ្នាទៅនឹងរូបភាពនៃឆ្មាហ្វេលីស

រូបប្រផេះ ក៏អាចតាងដោយម៉ាទ្រីសបានដែរ។ ធាតុនីមួយៗរបស់ម៉ាទ្រីស គឺកំណត់កម្រិតនៃដង់ស៊ីតេ(ភាពជិតខ្មៅ) របស់ភិចសិុល។ ដើម្បីជាភាពងាយស្រួល រូបភាពឌីជីថលភាគច្រើននាពេលបច្ចុប្បន្ន ប្រើចំនួនគត់ចាប់ពីលេខ 0 (កំណត់ឱ្យពណ៌ខ្មៅដែលជាកម្រិតពណ៌អប្បបរមា) ដល់លេខ 255 (កំណត់ឱ្យពណ៌សដែលជាកម្រិតពណ៌អតិបរមា) ដែលផ្តល់ជាសរុបគឺ$256 = 2^8$ ផ្សេងៗគ្នា នៃកម្រិតភាពជិតខ្មៅ (បរិមាណកម្រិតនៃពណ៌នេះ សមស្របសម្រាប់ កិច្ចការផ្នែករូបភាពលើគេហទំព័រ។ ទោះបីជាយ៉ាងណាក៏ដោយគឺមានវិធីមួយចំនួន ដែលត្រូវការកម្រិតពណ៌ច្រើនជាងនេះ ដើម្បីបង្កើតរូបភាពថ្មីឡើងវិញ ដោយល្អិតល្អន់ ដោយមិនបង្កត់លេខគណនា ដូចជានៅក្នុងករណីរូបភាពវេជ្ជសាស្ត្រជាដើម។

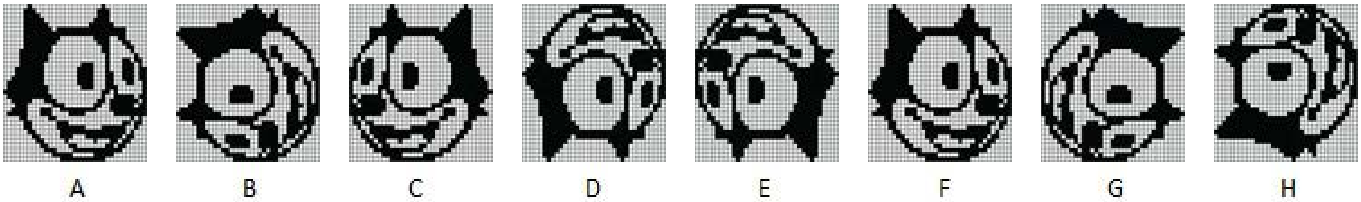
សម្រាប់រូបភាពពណ៌វិញ អាចតាងដោយម៉ាទ្រីសចំនួនបី។ម៉ាទ្រីសនីមួយៗ បញ្ជាក់ពីបរិមាណ ពណ៌ក្រហម ពណ៌បៃតង និង ពណ៌ខៀវ ដែលជាសមាសភាពពណ៌នៃរូបភាព។ ប្រព័ន្ធពណ៌នេះត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាប្រព័ន្ធ *RGB* (មានប្រព័ន្ធពណ៌ជាច្រើនផ្សេងទៀត ដែលគេបានប្រើអាស្រ័យតាមការអនុវត្តដូចជា: *CMYK* (សម្រាប់បោះពុម្ព) *Y'IQ* (សម្រាប់បញ្ជូនរូបភាពទូរទស្សន៍នៃប្រព័ន្ធ *NTSC* ជាដើម) ។ ធាតុនៃម៉ាទ្រីសទាំងនេះ គឺជាចំនួនគត់ចាប់ពី 0 ដល់ 255 ហើយធាតុទាំងនេះ វាកំណត់ឱ្យអាំងតង់ស៊ីតេនៃភិចសិុល ទៅតាមពណ៌និមួយៗក្នុង ម៉ាទ្រីស។ ដូចនេះក្នុងប្រព័ន្ធ *RGB* គេអាចតាងវាដោយ$256^3 = 2^{24} = 16777216$ ពណ៌ផ្សេងៗគ្នា។



រូបភាព3: រូបភាពដើមដែលផ្សំឡើងដោយធាតុពណ៌ក្រហម ពណ៌បៃតង និងពណ៌ខៀវ

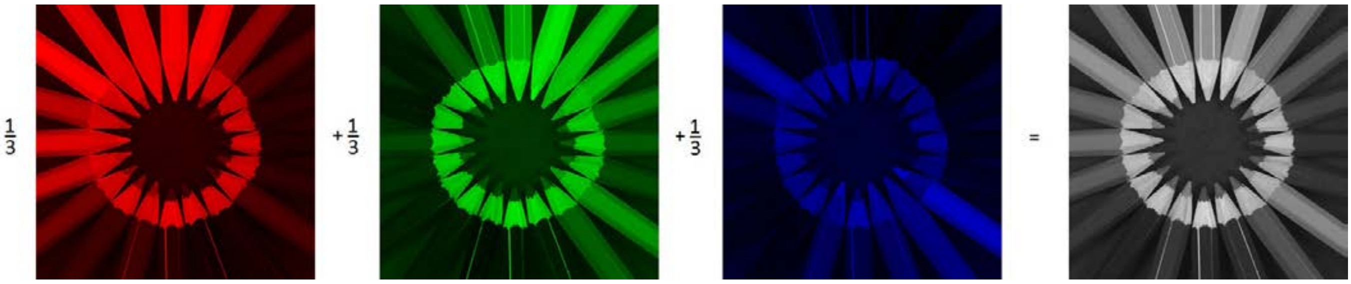
ដំណើរការរូបភាពឌីជីថលនិងប្រមាណវិធីម៉ាទ្រីស

នៅពេលដែលរូបភាពឌីជីថលមួយបានតាងដោយម៉ាទ្រីសនោះ យើងនឹងឆ្លល់ពីរបៀបធ្វើប្រមាណវិធីលើធាតុនីមួយៗដែលត្រូវគ្នានឹងរូបភាព។ ជាឧទាហរណ៍ប្រសិនបើយើងសន្មតថារូបភាពបាយណារី A ខាងក្រោម ជាម៉ាទ្រីសមួយដែល $A=\left(a_{i,j}\right)$ នោះរូបភាព B ដែល ត្រូវគ្នាទៅនឹងត្រង់ស្ប៉ូនៃម៉ាទ្រីស A គឺ $B=\left(b_{i,j}\right)=\left(a_{j,i}\right)^T=A^T$។ បើតាមលំដាប់រូបភាព H ត្រូវគ្នាទៅនឹងម៉ាទ្រីស$\left(a_{j,35-i+1}\right)$។ សាកល្បងស្វែងរកទំនាក់ទំនងម៉ាទ្រីស រវាងរូបភាព A ទៅនឹងរូបភាពដទៃទៀត!



រូបភាព4: បម្លែងម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍មួយទៀត៖ ប្រសិនបើយើងយកមធ្យមនពន្ត នៃធាតុត្រូវគ្នានៃម៉ាទ្រីស R, G និង B នៃរូបភាពពណ៌ A យើងបានរូបពណ៌ប្រផេះថ្មីមួយ (តម្លៃមិនគត់ ត្រូវបានបង្គត់ទៅចំនួនគត់ជិតបំផុត)។



រូបភាព5: មធ្យមនពន្តរបស់ធាតុម៉ាទ្រីស

ឧទាហរណ៍មួយទៀត៖ ប្រមាណវិធីគុណជាមួយចំនួន ស្កាលែ និងផលបូកម៉ាទ្រីស អាចបម្លែងរូបភាព ដែលជាធម្មតាត្រូវបានគេប្រើប្រាស់ធ្វើជាស្លាយ (*Slide*) ក្នុងកម្មវិធី *PowerPoint*© ដើម្បី ធ្វើបទបង្ហាញ។ ដើម្បីច្បាស់លាស់ជាងនេះ យើងសន្មតថាមានរូបភាពពណ៌ប្រផេះចំនួនពីរ ដែលតាងដោយម៉ាទ្រីសទំហំប៉ុនគ្នា A និង Z។ សម្រាប់គ្រប់ទំហំ ស្កាលែរ (ចំនួនពិត) t ក្នុងចន្លោះ $[0,1]$ នោះយើងកំណត់ម៉ាទ្រីស៖

$$M(t)=(1-t)A+tZ$$

គួរកត់សំគាល់ថា $M(0)=A, M(1)=Z$ ហើយចំពោះគ្រប់ t ស្ថិតនៅចន្លោះ ពី 0 ទៅ 1 ធាតុរបស់ម៉ាទ្រីស $M(t)$ ស្ថិតនៅចន្លោះរវាងធាតុ របស់ម៉ាទ្រីស A និង Z។ ដូចនេះ នៅពេលដែល t ប្រែប្រួលពី 0 ទៅ 1 នោះ ម៉ាទ្រីស $M(t)$ ក៏ប្រែប្រួលពី A ទៅ Z ដែរ។ សម្រាប់ករណីនៃរូបភាពពណ៌ បម្លែងខាងលើ ត្រូវអនុវត្តលើម៉ាទ្រីស R, G និង B នីមួយៗ ដែលបង្កើតជារូបភាព។

រូបភាព 6: $M(0)=A, M(0.13), M(0.25), M(0.38), M(0.50), M(0.63), M(0.75), M(0.88), M(1)=Z$

ផលគុណនៃម៉ាទ្រីសក៏អាចអនុវត្តក្នុងដំណើរការរូបភាពឌីជីថលផងដែរ។ទោះ យ៉ាងណា ឧទាហរណ៍បន្ទាប់ យើងនឹងធ្វើការលម្អិតជាងនេះទៅទៀត (ផ្អែកលើបច្ចេកទេសគណិតវិទ្យាជឿនលឿន ជាច្រើន ដែលជាធម្មតាត្រូវបានគេសិក្សា តែនៅក្នុងសាកលវិទ្យាល័យផ្នែកពិជគណិតលីនេអ៊ែរតែប៉ុណ្ណោះ) យើងសង្ឃឹមថាវានឹងបានជាប្រយោជន៍ចំពោះអ្នកអាន ព្រោះថានេះ នេះជាឱកាសរីករាយ បានមកពីលទ្ធភាពនៃការបំបែកធាតុ របស់ម៉ាទ្រីសមួយ ជាផលគុណម៉ាទ្រីសជាច្រើន ដែលមានទម្រង់ពិសេស។ ភាពលម្អិត អាចរកអានបានក្នុងក្នុងឯកសារយោង [Lay, 2011] និង [Poole, 2005]។

សន្មតថា មាន ការបំបែកតម្លៃទោលមួយ (*singular value decomposition SVD*) ដែលកើតឡើងដោយការសរសេរ ម៉ាទ្រីស $A_{m\times n}$ មួយជាផលគុណនៃបីម៉ាទ្រីស:

$$A_{m\times n} = U_{m\times m} S_{m\times n} V_{n\times n}^T$$

ដែល U និង V គឺជាម៉ាទ្រីសអរតូកូណាល់ (មានន័យថា U^TU និង V^TV ជាម៉ាទ្រីសឯកតាលំដាប់ $m\times m$ និង $n\times n$ រៀងគ្នា) ហើយ S ជាម៉ាទ្រីសមួយដែលធាតុ $s_{i,j}$ ស្មើសូន្យចំពោះ $i\neq j$ និង $s_{1,1}\geq s_{2,2}\geq\ldots\geq s_{k,k}\geq 0$ ដែល $k=\min\{m,n\}$ នេះជាឧទាហរណ៍មួយនៃការបំបែក *SVD* :

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=USV^T$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}^T$$

គេអាចបង្ហាញថា គ្រប់ ម៉ាទ្រីសទាំងអស់ សុទ្ធតែមានការបំបែក *SVD* ([Lay, 2011], [Poole, 2005])។ លើសពីនេះទៅទៀត វិធីសាស្ត្រនេះ អាចឱ្យយើងគណនានូវការបំបែកបែបនេះ ដោយ ប្រើកុំព្យូទ័រ។ ចំណុចសំខាន់នៃឧទាហរណ៍របស់យើង គឺធ្វើការសង្កេតឱ្យឃើញថា ប្រសិនបើ $u_1,u_2,\ldots,u_m$ ជាជួរឈររបស់ម៉ាទ្រីស U ហើយ $v_1,v_2,\ldots,v_n$ ជាជួរឈររបស់ម៉ាទ្រីស V នោះយើងបាន:

$$A=USV^T=s_{1,1}u_1v_1^T+s_{2,2}u_2v_2^T+\cdots+s_{k,k}u_kv_k^T$$

តើហេតុអ្វី? ឧបមាថា A ជា រូបភាពពណ៌ប្រផេះមួយ ដែលមានទំហំ 1000×1000 ត្រូវបានគេបញ្ជូនពីផ្កាយរណប ទៅកាន់ស្ថានីយ៍នៅលើផែនដី។ ជាគោលការណ៍ ផ្កាយរណបនេះត្រូវបញ្ជូនតួលេខមួយលាន (មួយតួលេខសម្រាប់រាល់ភិចស៊ិល)។ តាមធម្មតា មានតែធាតុ$s_{i,i}$ ដំបូងរបស់ម៉ាទ្រីស S នៃម៉ាទ្រីសបំបែកធាតុ ដែលសំខាន់ (ក្រៅពីនោះមានតម្លៃតូច)។ ដូចនេះវាគ្រប់គ្រាន់ទៅហើយដែលផ្កាយរណបញ្ជូន ដូចជាថា 20 តួដំបូងរបស់ U និង V ហើយនិង 20 តួដំបូងរបស់ធាតុ $s_{i,i}$ (ជា សរុប គឺត្រឹមតែ 20.1000 + 20.1000 + 20 = 40020 តួលេខដែលត្រូវបញ្ជូន)។ ទិន្នន័យទាំងអស់ដែលទទួលបានខាងលើ ត្រូវបានស្ថានីយ៍នៅលើផែនដីគណនា ដោយម៉ាទ្រីស

$s_{1,1}u_1{v^T}_1+s_{2,2}u_2{v^T}_2+\cdots+s_{20,20}u_{20}{v^T}_{20}$ ដែលនឹងផ្តល់នូវរូបភាពពិតដើមមួយ។

ឧទាហរណ៍: រូបភាពខាងក្រោមនេះ គឺជារូបភាពរូបភាពរបស់អ្នកគណិតវិទូម្នាក់ឈ្មោះ*Christian Felix Klein* ដែលមានទំហំ $720\times521=377280$ *pixels* ។

រូបភាព 7:*Felix Klein*

តាមការបំបែកធាតុ *SVD* នៃម៉ាទ្រីសត្រូវគ្នារបស់រូបភាពនេះ យើងអាចគណនាម៉ាទ្រីស $s_{1,1}u_1{v^T}_1+s_{2,2}u_2{v^T}_2+\cdots+s_{r,r}u_r{v^T}_r$ ចំពោះ $r=1,5,10$ និង 20។ ម៉ាទ្រីសទាំងនេះ ខិតជិតទៅនឹងរូបភាពដើម ដូចបាន បង្ហាញក្នុងរូបភាពខាងក្រោម។ សង្កេតមើល រូបភាពដើមដែលត្រូវគ្នាទៅនឹងករណី $r=524$ ។ តើវាពិតជាគួរឱ្យចាប់អារម្មណ៍ដែររឺទេ?

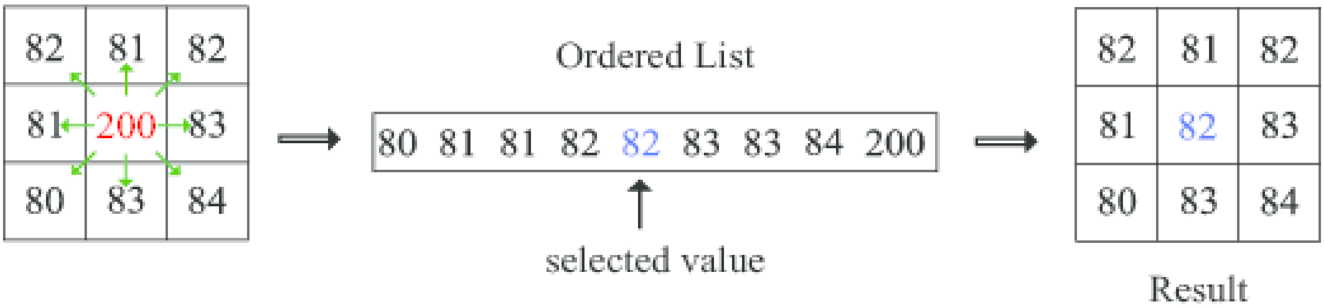
រូបភាព 8: ករណី $r=1,5,10$ និង 20

ការអនុវត្តន៍ផ្សេងទៀត

ដំណើរការរូបភាពឌីជីថល ត្រូវបានអនុវត្តក្នុងផ្នែកមួយចំនួនដូចជា ផ្នែកទូរពិនិត្យ ការបញ្ជូនទិន្នន័យ ផ្នែកវេជ្ជសាស្ត្រ ផ្នែកមនុស្សយន្ត ផ្នែកកុំព្យូទ័រចក្ខុវិស័យ និងឧស្សាហកម្មភាពយន្ត ជាដើម។ តួយ៉ាង ចំពោះផ្នែកទូរពិនិត្យ រូបភាពទាំងអស់

ដែលបានមកពីផ្កាយរណប មានប្រយោជន៍ដល់ការតាមដានធនធានធម្មជាតិ ការគូរផែនទីភូមិសាស្ត្រ ការវិភាគការកើនឡើងនៃទីក្រុង និងការអនុវត្តទៅលើផ្នែកបរិស្ថានផ្សេងៗទៀត។ ចំពោះផ្នែកបញ្ជូនរូបភាព យើងមានគមនាគន៍តាមរយៈ ទូរសារ បណ្ដាញអ៊ិនធឺណែត និងស៊ីស៊ីធីវី[1] *(Closed-circuit TV)* សម្រាប់ត្រួតពិនិត្យតាមដាន និងសុវត្ថិភាព។ ការអនុវត្តផ្នែកវេជ្ជសាស្ត្រ យើងបានប្រើប្រាស់វាក្នុងដំណើរការរូបភាពកាំរស្មីអ៊ិច ការបម្លែងរូបភាព ស្កេនចិញ្ចាំ *(Transaxial tomography)* វិទ្យុសាស្ត្រ ភាពខ្វ័ររបស់មេដែកនុយក្លេអ៊ែ និងប្រើក្នុងម៉ាស៊ីនអេកូស្កេន។

វិធីសាស្ត្រមួយចំនួននៃការទទួលនិងការបញ្ជូនអាចបង្កើតនូវភាពព្រាកក្នុងរូបភាព។ តម្រងមេដ្យាន ជាបច្ចេកទេសប្រើដើម្បីបំបាត់ភាពរំខាន ឬកាត់បន្ថយនូវអានុភាពនៃភាពរំខាន : ចំពោះធាតុនីមួយៗនៃម៉ាទ្រីស យើងរើសតម្លៃធាតុនៅជុំវិញវា បន្ទាប់មកយើងរៀបតាមលំដាប់។ តម្រងមេដ្យាន គឺជាការជ្រើស រើស យកតម្លៃ ធាតុកណ្ដាលហើយជំនួសតម្លៃនៃធាតុនោះ។

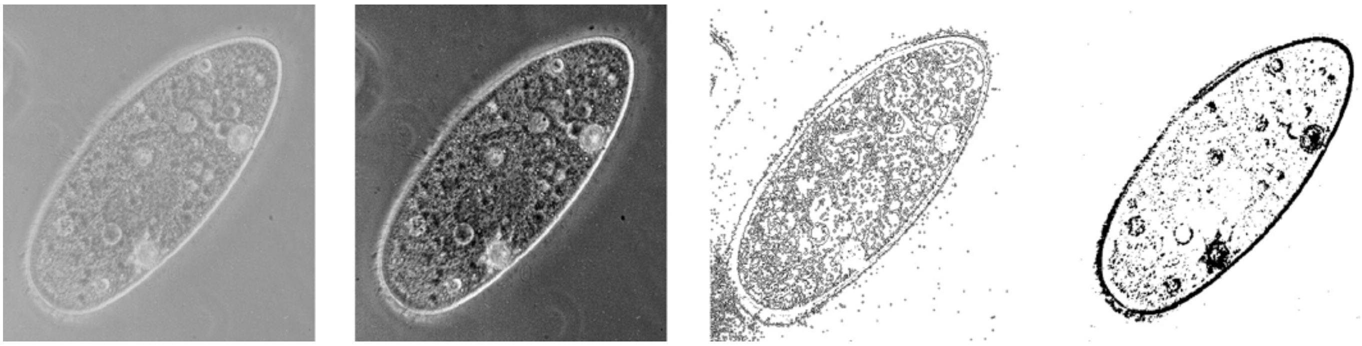


រូបភាព 9:តម្រងមេដ្យាន

រូបភាព 10: រូបភាពដែលមានភាពរំខាន និងរូបភាពដែលមានតម្រងមេដ្យាន

[1] ប្រព័ន្ធកាម៉េរ៉ាសុវត្ថិភាព

មានបច្ចេកទេសផ្សេងៗជាច្រើនទៀត ក្នុងដំណើរការរូបភាព ដែលប្រកបដោយគោលដៅខុសៗគ្នា។ តាមរយៈរូបភាពខាងក្រោម គឺបង្ហាញពីគំរូនៃការកែខៃធ្វើឱ្យមានភាពខុសគ្នាដោយកំណែភាពច្បាស់ (រំលេចគែម និងចំណុចទុល (contrast adjustment, edge detection and threshold)។



រូបភាព 11:រូបភាពដើម និងរូបភាពដដែលជាមួយនឹងការកែខៃ

កំណត់សម្គាល់ចុងក្រោយ

គោលដៅនៃអត្ថបទនេះ គឺចង់បង្ហាញនូវការអនុវត្តបន្តិចបន្តួចលើម៉ាទ្រីស សម្រាប់សាស្ត្រាចារ្យវិទ្យាល័យ និងនិស្សិតមហាវិទ្យាល័យ ពីដំណើរការរូបភាពឌីជិថល។ គួរចាំថា អ្វីដែលគណិតវិទ្យាបានធ្វើ គឺច្រើនជាម៉ាទ្រីសឆ្ងាយណាស់។ ប្រធានបទមានលក្ខណៈទូលំទូលាយ សម្បូរបែប និងទាន់សម័យ។ ជាអកុសល ចំនួនទំព័រមានកំណត់ យើងមិនអាចរៀបរាប់សព្វគ្រប់បានទេ។ សម្រាប់អ្នកចង់ស្រាវជ្រាវបន្ត យើងសូមឱ្យអ្នកអាននូវសៀវភៅ[Gonzalez and Woods, 2007] និង [Gomes and Velho, 2008]។

ឯកសារយោង

Gomes, J.; Velho, L. *Image Processing for Computer Graphics and Vision*.Springer-Verlag, 2008.

Gonzalez, R. C.; Woods, R. E. *Digital Image Processing*. Third Edition.Prentice Hall, 2007.

Lay, D. *Linear Algebra and Its Applications*. Forth Edition. Addison Wesley, 2011.

Poole, D. *Linear Algebra: A Modern Introduction*. Second Edition. Brooks Cole, 2005.

The photo of the Mona Liza in LEGO is a property of Marco PeceUdronotto, who kindly granted permission to use it in this work.