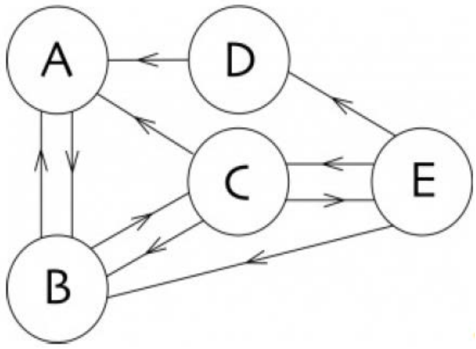
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

ទម្រង់ការ ហ្គូហ្គិល (Google) ៖ ច្រវ៉ាក់ ម៉ាកូវ និងតម្លៃអ៊ីហ្គិន (eigenvalues)

រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ:Christiane Rousseau។



តាំងពីដំបូងបំផុត ហ្គូហ្គិលបានក្លាយជា «ឧបករណ៍រាវរក» (ដ៏ល្បី)។ វាបានមកដោយសារវិធីសាស្រ្តដ៏ប្រសើរ នៃការតម្រៀបទិន្នន័យ៖ វិធីសាស្រ្តចាត់ថ្នាក់ទំព័រ (The PageRank វិធីសាស្រ្ត)។ ពិតណាស់ ជា មួយនឹងទំព័រទិន្នន័យយ៉ាងច្រើនមហិមានៃ World-Wide-Web ការរាវរក ជាច្រើនបាន បញ្ចប់ដោយច្រើនពាន់ ច្រើន លានលទ្ធផល។ ប្រសិនបើលំដាប់លំដោយមិនបានរៀបត្រឹមត្រូវទេនោះ ការរាវរកមិនបានជួយអ្វីទេ ព្រោះគ្មាននរណាម្នាក់អាចរាវរកអ្វីដែលចង់បាន ក្នុងចំណោមទិន្នន័យរាប់លាននោះឡើយ។

តេវិធីសាស្រ្តចាត់ថ្នាក់ទំព័រធ្វើការរបៀបណា?

យើងនឹងពន្យល់អំពីបញ្ហានេះ។ ប៉ុន្តែមុនដំបូង យើងបង្ហាញការរាវរកមួយនៅលើហ្គូហ្គិល។ នៅថ្ងៃទី ៤ ខែ មិថុនា ឆ្នាំ ២០១០ លទ្ធផលនៃការរាវរកពាក្យ *Klein project* ដែល ទទួលបានមាន ១៦,៣00,000 ដែលគម្រោងនេះទើបចាប់ផ្តើមតែប៉ុណ្ណោះ។ ក្នុងពេលនោះ ចម្លើយដំបូងគឺ

http://www.mathunion.org/icmi/other-activities/klein-project/introduction/

ដែលមិនមែនជា

http://www.kleinproject.org/

URL (URL= Uniform Resource Location ហៅបានថាជាអាសយដ្ឋានវិប) ដំបូង គឺជាអាសយដ្ឋានវិប ដែលបង្ហាញនៅលើវិបសាយសហាគមន៍គណិតវិទ្យាអន្តរជាតិ (The International Mathematical Union) : http://www.mathunion.org។ ពីព្រោះសហាគមន៍គណិតវិទ្យាអន្តរជាតិ គឺជាស្ថាប័នសំខាន់ នៅលើវិបសាយនោះ នឹងបង្ហាញមុនគេពេលដែលយើងរាវរក “ International Mathematical Union” ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត វាទាក់ទងទៅ ទំព័រមែកធាងផ្សេងទៀតរបស់វា ហើយទំព័រមួយក្នុងចំណោមទំព័រទាំងនោះគឺ

http://www.mathunion.org/icmi/other-activities/klein-project/introduction/

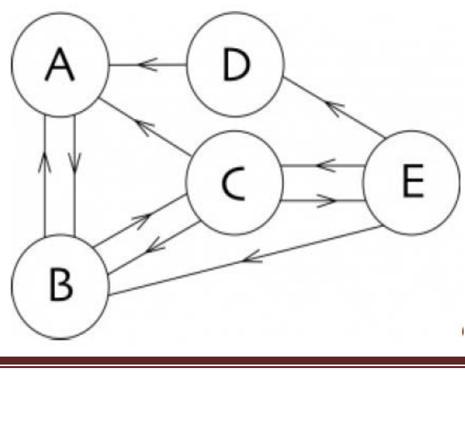
ចាប់ពីពេលនេះទៅមុខ ក្នុងអនាគតដ៏ខ្លី យើងជឿជាក់ថាទំព័រ

http://www.kleinproject.org/

នឹងបង្ហាញដំបូងគេ ពេលរាវរកពាក្យ *Klein project*។

ដើម្បីពន្យល់អំពីវិធីសាស្រ្ត យើងតាងម៉ូដែលវិប ដោយក្រាបមានទិសដៅ ។ កំពូលនិមួយៗ តំណាងឱ្យទំព័រ ហើយព្រួញ តាងឱ្យ បញ្ជាប់ រវាង ពីទំព័រ។ ដូចបានបញ្ជាក់មករួចហើយ ទំព័រវិបសាយត្រូវនឹងអាសយដ្ឋានវិបផ្សេងៗគ្នា។ ដោយវិបសាយមួយអាចមានច្រើនទំព័រ នោះម៉ូដែលនេះ មិនសំខាន់ថាជាទំព័ររង ឬទំព័រមេនៃវិបសាយនោះទេ។ ប៉ុន្តែ វិធីសាស្រ្តនឹងមានទំនោរទៅទំព័រមេ ដែលជាស្នូលនៃវិបសាយ។

ឧទាហរណ៍គម្រូ



ពួកយើងក្រឡេកមើលគម្រូនៃវិបសាយ ដែលបានបង្ហាញ នៅខាងឆ្វេងនេះ ដែលមាន៥ទំព័រឈ្មោះ A, B, C, D និង E។ នៅលើវិបសាយ នេះ មានបញ្ជាប់មួយចំនួន។ ប្រសិនបើយើងនៅលើទំព័រ A នោះយើងមានបញ្ជាប់តែមួយគត់ គឺទៅទំព័រ B ដែលក្នុងពេលជាមួយគ្នានេះ ដែរ ប្រសិនបើយើងនៅលើទំព័រ C យើងនឹងមានបញ្ជាប់បីផ្សេងទៀត ដែល យើងអាចឆ្លងទៅទំព័រផ្សេងទៀត ដូចជាទៅទំព័រ A ឬ B ឬ E ជាដើម។ ត្រូវចាំថា យ៉ាងហោច

ណាស់ក៏មាន បញ្ជាប់មួយ យ៉ាងតិចពីទំព័រមួយ។

យើងលេងល្បែងនេះ ដោយ *ជំហានចៃដន្យ* លើក្រាហ្វមានទិសដៅ។ ចាប់ផ្តើមពីទំព័រណាមួយ យើងដើរ ដោយជម្រើសចៃដន្យនៃបញ្ជាប់ ទៅកាន់ទំព័រមួយទៀត ហើយធ្វើបែបនេះតទៅ ។ ជាឧទាហរណ៍ ប្រសិនបើយើងចាប់ផ្តើមនៅលើទំព័រ B យើងអាចឈានទៅទំព័រ A ឬ C ជាមួយប្រូបាប៊ីលីតេ 1/2 សម្រាប់ករណីនីមួយៗ។ ប៉ុន្តែប្រសិនបើយើងចាប់ផ្តើមនៅលើទំព័រ D នោះយើងអាចឈានទៅទំព័រ A តែមួយគត់ ជាមួយនឹងប្រូបាប៊ីលីតេស្មើ 1។ យើងបន្តល្បែងនេះតទៅទៀត។

តើយើងនឹងនៅទំព័រណាបន្ទាប់ពីយើងឈានបាន n ជំហាន?

យើងធ្វើជាលក្ខណៈស្វ័យប្រវត្តនូវដំណើរនេះ ដោយសង្ខេបវាក្នុងម៉ាទ្រីស P ដែលធាតុរបស់វាតាមជួរឈរជាទីតាំងដើម ហើយជួរដេកជាទីដែលទៅដល់។

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
P = & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\end{array}
$$

យើងសម្គាល់ឃើញថា ផលបូកតម្លៃតាមជួរឈរនីមួយ ៗមានតម្លៃស្មើនឹង ១ ហើយធាតុទាំងអស់នោះមានតម្លៃធំជាង ឬ ស្មើនឹង 0 ។ ម៉ាទ្រីស ដែលលក្ខណៈពិសេសពីរនេះគឺ ជាម៉ាទ្រីស ដំណើរច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ (Markov chain process) ឬអាចហៅថាម៉ាទ្រីសចំលងម៉ាកូវ (Markov transition matrix)។ ជានិច្ចជាកាល វាតែងតែមានតម្លៃអ៊ីហ្គិនស្មើនឹង ១ ហើយមានវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិន ដែលកុំប៉ូសង់ដែលមានតម្លៃអ៊ីហ្គិនស្មើនឹង ១ ហើយកុំប៉ូសង់របស់វាមានតម្លៃធំជាងឬស្មើសូន្យ និងតូចជាងឬស្មើ ១។ មុននឹងរៀបរាប់ពីវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិន និងតម្លៃអ៊ីហ្គិន យើងពិនិត្យមើលលក្ខណៈម៉ាទ្រីសដែល តាងក្រាហ្វនៃវិបសាយសិន។

យើងកំណត់អថេរចៃដន្យ X_n មួយពីសំណុំនៃទំព័រ $\{A,B,C,D,E\}$ ដែលមាន N ទំព័រ (ក្នុងករណីនេះ N = 5)។ X_n តំណាងឱ្យទំព័រដែលយើងឈរនៅបន្ទាប់ពី n ជំហាន ។ ដូចនេះ បើ យើងតាង p_{ij} ជាធាតុនៃម៉ាទ្រីស P ដែល i ជាជួរដេក ហើយ j ជាជួរឈរ នោះ p_{ij} គឺជាប្រូបាប៊ីលេមានលក្ខខណ្ឌ នូវព្រឹត្តិការណ៍ ដែលនៅជំហានទី n+1 យើងឈានទៅទំព័រ j ក្រោមលក្ខខណ្ឌដែលជំហានទី n យើងឈរនៅទំព័រ i។

$P_{ij} = \Pr\mathrm{ob}(X_{n+1} = i | X_n = i)$

គួរ ចាំថា ប្រូបាប៊ីលីតេនេះ មិនអាស្រ័យនឹង n ទេ។ ដែលយើងអាចនិយាយបានថាដំណើរច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវ មិនចងចាំអតីតកាលទេ។ វាមិនពិបាកទេក្នុងការបញ្ជាក់ថា ប្រូបាប៊ីលីតេបន្ទាប់ពីជំហានទីពីរ អាចតាងដោយម៉ាទ្រីស P^2 ។

យើងបង្ហាញទ្រឹស្តីបទប្រូបាប៊ីលីតេ ដែលមានប្រយោជន៍មួយចំនួន(អ្នកអាចមើលរម្លងបាននូវសម្រាយបញ្ជាក់)

$$Prob(X_{n+2} = i | X_n = j) = \sum_{k=1}^{N} Prob(X_{n+2} = i \ \ and \ \ X_{n+1} = k | X_n = j)$$

និយមន័យប្រូបាប៊ីលីតេមានលក្ខខណ្ឌគឺ

$$\mathrm{Prob}(X_{n+2} = i | X_n = j) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{Prob}\left(X_{n+2} = i \ \ and \ \ X_{n+1} = k \ \ and \ \ X_n = j\right)}{\mathrm{Prob}\left(X_n = j\right)}$$

យើងប្រើវិធីដែលធ្លាប់ប្រើកន្លងមក: គុណ ហើយចែកនឹងតួតែមួយ:

$$\mathrm{Prob}(X_{n+2} = i | X_n = j) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\mathrm{Prob}\left(X_{n+2} = i \ \ and \ \ X_{n+1} = k \ \ and \ \ X_n = j\right)}{\mathrm{Prob}\left(X_{n+1} = k \ \ and \ \ X_n = j\right)} \frac{\mathrm{Prob}\left(X_{n+1} = k \ \ and \ \ X_n = j\right)}{\mathrm{Prob}\left(X_n = j\right)}$$

ផលចែកតួដំបូងស្មើនឹង:

$$\text{Prob}\left(X_{n+2}=i\middle|X_{n+1}=k \;\; and \;\; X_n=j\right)=\text{Prob}\left(X_{n+2}=i\middle|X_{n+1}=k\right)$$

ដោយដំណើរច្រវ៉ាក់ម៉ាកូវមិនចងចាំអតីតកាលនៃជំហានមុន ដូចនេះ

$$\begin{aligned}\text{Prob}(X_{n+2}=i|X_n=j) &= \sum_{k=1}^{N} \text{Prob}(X_{n+2}=i \;\; and \;\; X_{n+1}=k|X_n=k)\text{Prob}(X_{n+1}=k|X_n=j)\\ &= \sum_{k=1}^{N} P_{ik}P_{kj}\\ &= \left(P^2\right)_{ij}\end{aligned}$$

នៅក្នុងឧទាហរណ៍របស់យើងគឺ

$$P^2=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 0 & 11/18 \\ 0 & 2/3 & 4/9 & 1 & 1/9 \\ 1/2 & 0 & 5/18 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

ធ្វើបន្តទៅទៀតតាមរបៀបនេះ វាច្បាស់ណាស់ថា ធាតុ $(P^m)_{ij}$ នៃម៉ាទ្រីស P^m ដែលតាងប្រូបាប៊ីលីតេ $\text{Prob}\left(X_{n+m}=i\middle|X_n=j\right)$ តួយ៉ាងដូចជា

$$P^{32}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.293 & 0.293 & 0.293 & 0.293 & 0.293 \\ 0.390 & 0.390 & 0.390 & 0.390 & 0.390 \\ 0.220 & 0.220 & 0.220 & 0.220 & 0.220 \\ 0.024 & 0.024 & 0.024 & 0.024 & 0.024 \\ 0.073 & 0.073 & 0.073 & 0.073 & 0.073 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

ជួរឈរទាំងអស់នៃ P^{32} ដូចគ្នាបេះបិទ ប្រសិនបើយើងយកកម្រិតល្បឿងត្រឹម ៣ខ្ទង់ទសភាគ ហើយដូចគ្នានេះដែរ សម្រាប់ជួរឈរទាំងអស់នៃ P^n ពេលដែល n > 32។ បើសិនជាយើងជ្រើសរើសកម្រិតល្បឿងខ្ពស់ជាងនេះ ក៏យើងនៅតែសង្កេតឃើញភាពមិនប្រែប្រួលនេះដែរ តែពេលនោះ n ធំជាង ៣២។ ដូចនេះបន្ទាប់ពី n ជំហានមក ដែល n ធំគ្រប់គ្រាន់ តម្លៃប្រូបាប៊ីលីតេដែលយើងឈរនៅទំព័រណាមួយមិនអាស្រ័យនឹងទីតាំមចាប់ផ្តើមទេ!

លើសងពីនេះ យើងសង្កេតមើលវ៉ិកទ័រ π

$$\pi^t=(0.293, 0.390, 0.220, 0.024, 0.073)$$

(π គឺជាវ៉ិចទ័រឈរ ហើយត្រង់ស្ប៉ូររបស់វា π^t គឺវ៉ិចទ័រដេក)។ វាងាយស្រួលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $P\pi=\pi$ ។ បើយើងសន្មត កូអរដោនេទី i នៃវ៉ិចទ័រ π^t វាគឺជាប្រូបាប៊ីលីតេស្ថិតនៅទំព័រទី i នៅខណ: n ដូច្នេះ π^t គឺជាប្រូបាប៊ីលីតេរបាយនៃទំព័រនៅខណ: n ហើយវាក៏ជាប្រូបាប៊ីលីតេរបាយនៅខណ: n+1 ផងដែរ។ សម្រាប់ករណីនេះ គេហៅវ៉ិចទ័រ π ថាជារបាយមិនប្រែប្រួល ។ របាយមិនប្រែប្រួលនេះ អាចឱ្យតម្រៀបទំព័រតាមលំដាប់។ ឧទាហរណ៍: យើងតម្រៀបទំព័រតាមលំដាប់ B,A,C,E,D ហើយយើងបញ្ជាក់ថា ទំព័រ B ជាទំព័រសំខាន់ជាងគេបំផុត។

ករណីទូទៅ

ករណីទូទៅអាចប្រៀបប្រដូចនឹងឧទាហរណ៍របស់យើង ។ យើងតាងគេហទំព័រទាំងអស់ដោយក្រាហ្វមាន ទិសដៅមួយ ដែលមាន កំពូល N តាងចំនួន N ទំព័រនៃគេហទំព័រទាំងអស់ក្នុងវិប។ ចំណែកព្រួញទិសដៅ គឺជាបញ្ជាប់រវាងទំព័រទៅទំព័រមួយ។ យើងអាចសង្ខេបទិន្នន័យទាំងនេះនៅក្នុងម៉ាទ្រីសលំដាប់ $N\times N$ នៃម៉ាទ្រីស P ជាមួយនឹងជួរឈរ j

តាងទំព័រដែលចាប់ផ្ដើម ហើយជួរដេក i ជាទំព័រទី i ដែលទៅដល់។ នៅក្នុងឧទាហរណ៍យើង យើងបានរកឃើញវ៉ិចទ័រ π ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $P\pi = \pi$ ។ វ៉ិចទ័រនេះជាវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិន ដែលមានតម្លៃអ៊ីហ្គិន ស្មើនឹង១។ ឥឡូវយើងពោលពី និយមន័យវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិន និងតម្លៃអ៊ីហ្គិន។

និយមន័យ: គេឱ្យ P ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $N \times N$ ។ $\lambda \in \mathbb{C}$ គឺជាតម្លៃអ៊ីហ្គិន នៃម៉ាទ្រីស P ។ ប្រសិនបើមាន វ៉ិចទ័រមិនសូន្យ $X \in \mathbb{C}^N$ ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់ $PX = \lambda X$ នោះវ៉ិចទ័រ X ជាវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិននៃម៉ាទ្រីសP។

យើងក៏បង្ហាញពីរបៀបរកតម្លៃអ៊ីហ្គិន និងវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិនផងដែរ។

អំណះអំណាង: គេឱ្យ P ជាម៉ាទ្រីសលំដាប់ $N \times N$ ។ តម្លៃអ៊ីហ្គិននៃម៉ាទ្រីស P គឺជាឬសនៃកន្សោមពហុធា $\det(\lambda I - P) = 0$ ដែល I ជាវ៉ិចទ័រឯកតាលំដាប់ $N \times N$ ។ វ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិននៃតម្លៃអ៊ីហ្គិន λ គឺជាចម្លើយមិនសូន្យ នៃប្រព័ន្ធសមីការអូម៉ូសែនលីនេអ៊ែរ $(\lambda I - P)X = 0$ ។

តាមទ្រឹស្ដីបទដ៏ជ្រាលជ្រៅ របស់ហ្រ្វូបេនុស (Frobenius) អះអាង ថា សម្រាប់ម៉ាទ្រីស នៃទំនាក់ទំនង ក្រាហ្វិបសាយ យើងតែងតែរកបាននូវចម្លើយមិនប្រែប្រួលមួយជានិច្ច។

ទ្រឹស្ដីបទ ហ្វ្រូបេនុស: (Frobenius theorem) យើងសន្មតនូវ ម៉ាទ្រីសចំលងម៉ាកូវលំដាប់ $N \times N$ $P = (p_{ij})$ (មានន័យថា $p_{ij} \in [0,1]$ ចំពោះគ្រប់ i, j ហើយ ផលបូកនៃធាតុតាមជួរឈរនីមួយៗ គឺស្មើនឹង ១ គឺ $\sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1$)។ ពីនោះយើងបាន

១) $\lambda = 1$ ជាតម្លៃអ៊ីហ្គិនមួយនៃម៉ាទ្រីសP

២) តម្លៃអ៊ីហ្គិន λ ណាមួយនៃ P ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|\lambda| \le 1$

៣) មានវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិននៃតម្លៃអ៊ីហ្គិនស្មើនឹង ១ ដែល គ្រប់កូអរដោនេមានតម្លៃធំជាងឬស្មើនឹង 0។ ជាទូទៅ យើងអាចសន្មតថា ផលបូកកូអរដោនេទាំងនោះស្មើនឹង១។

ពេលនេះយើងស្គាល់អំពីផលវិជ្ជមានរបស់ទ្រឹស្ដីបទនេះ។សម្រាប់ គោលបំណងនេះ យើងនឹងបង្កើតសម្មតិកម្មមួយដែលថា ម៉ាទ្រីស P មានមូលដ្ឋានលើវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិន $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ និងសន្មតថា v_1 ជាវ៉ិចទ័រ π នៃទ្រឹស្ដីបទហ្វ្រូបេនុស។ សម្រាប់ គ្រប់វ៉ិចទ័រ v_i នីមួយៗ មានតម្លៃ λ_i ដែល $Pv_i = \lambda_i v_i$ ។ យើងយកវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ ណាមួយនៃX ហើយ $X^t = (x_1, ..., x_N)$ ដែល $x_i \in [0,1]$ និង $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ ។ យើងបំបែកធាតុ X តាម B:

$$X = \sum_{i=1}^{N} a_i v_i$$

បច្ចេកទេសដោះស្រាយដែលយើងមួលចោលពីមុន អាចទាញបញ្ជាក់ថា $a_1 = 1$ ។ ឥឡូវយើងគណនា PX

$$PX = \sum_{i=1}^{N} a_i P v_i = \sum_{i=1}^{N} a_i \lambda_i v_i$$

ដោយ v_i ជាវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិន នៃតម្លៃអ៊ីហ្គិន λ_i ហើយបើយើងធ្វើបន្តទៅទៀត យើងទទួលបាន

$$P^n X = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i^n v_i$$

ប្រសិនបើគ្រប់ λ_i សម្រាប់ i >1 ផ្ទៀងផ្ទាត់ $|\lambda| < 1$ នោះ

$$\lim_{x \to \infty} P^n X = a_1 v_1 = \pi$$

នេះគឺអ្វីដែលកើតឡើងក្នុងឧទាហរណ៍របស់យើង!

គួរកត់សម្គាល់ថា ទ្រឹស្ដីបទមិនបានអះអាងថា គ្រប់ម៉ាទ្រីស P ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌនៃសម្មតិកម្ម មានលក្ខណសម្បត្តិនេះទេ។ តម្រូវការតាមការប៉ាន់ស្មានរបស់ទ្រឹស្ដីបទឡើយ។ យើងនឹងរៀបរាប់ពីបញ្ហាដែលអាចនឹង កើតមាន និងវិធីទប់ស្កាត់ ។

បញ្ហាដែលអាចកើតមានឡើង:

- តម្លៃអ៊ីហ្គិន 1 អាចជាឫសត្រួតនៃកន្សោមពហុធារបស់ $\det(\lambda I - A) = 0$
- ម៉ាទ្រីស P អាចមានតម្លៃអ៊ីហ្គិន λ ផ្សេងទៀត ខុសពី 1 ជាមួយម៉ូឌុលឡស្មើនឹង 1។

តើត្រូវធ្វើដូចម្តេចក្នុងករណីនេះ?

យើងហៅម៉ាទ្រីសចម្លងម៉ាកូវ ដែលគ្មានបញ្ហាថា ម៉ាទ្រីសចម្លងម៉ាកូវនិយ័ត គឺថា

និយមន័យ: ម៉ាទ្រីសចម្លងម៉ាកូវ មាននិយ័តភាព (ភាពទៀងទាត់) ប្រសិនបើ

- តម្លៃអ៊ីហ្គិន 1 គឺជាឫសធម្មតានៃពហុធា $\det(\lambda I - A) = 0$
- គ្រប់តម្លៃអ៊ីហ្គិន λ ផ្សេងទៀតនៃម៉ាទ្រីស P ខុសពី 1 មានម៉ូឌុយឡតូចជាង 1។

គួរកត់សម្គាល់ថា ម៉ាទ្រីស P ភាគច្រើនមាននិយ័តភាព ។ ដូច្នេះប្រសិនបើមានម៉ាទ្រីសចម្លងណា នៅលើវិបមិនប្រក្រតី នោះយើងត្រូវរិះរកយុទ្ធសាស្ត្រណាមួយបំផ្លែងវាជាម៉ាទ្រីសនិយ័តមួយ។

វិធីទប់ស្កាត់: យើងសង្កេតម៉ាទ្រីស $Q = (q_{ij})$ លំដាប់ $N \times N$ ដែល $q_{ij} = \dfrac{1}{N}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ i, j។ យើងជំនួសម៉ាទ្រីស P នៃវិប ដោយម៉ាទ្រីសដូចខាងក្រោម:

(1) $P_\beta = (1-\beta)P + \beta Q$

សម្រាប់តម្លៃ β តូចមួយ ដែល $\beta \in [0,1]$ (តម្លៃ $\beta = 0.15$ ធ្លាប់បានប្រើនៅក្នុង ហ្គូហ្គិល)។ គួរកត់សម្គាល់ថា ម៉ាទ្រីស P_β នៅតែមានធាតុវិជ្ជមាន ហើយផលបូកធាតុតាមជួរឈរនីមួយៗ មានតម្លៃស្មើ 1 ដដែល ដូចនេះ វានៅតែជាម៉ាទ្រីសចម្លងម៉ាកូវ។ ទ្រឹស្តីបទខាងក្រោមនេះ អះអាងថាមានតម្លៃ β តូចមួយ ដែលអាចដោះស្រាយបញ្ហាបាន។

ទ្រឹស្តីបទ: គេឱ្យម៉ាទ្រីសចម្លងម៉ាកូវ P មួយ នោះតែងតែមានតម្លៃវិជ្ជមាន β តូចមួយ តាមដែលយើងចង់បាន ដែលធ្វើឱ្យម៉ាទ្រីស P_β មាននិយ័តភាព ។ សន្មត π ជាវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិនដែលមានតម្លៃអ៊ីហ្គិន 1 សម្រាប់ម៉ាទ្រីស P_β ដែលផលបូកនៃកូអរដោនេស្មើ 1។ សម្រាប់ម៉ាទ្រីស P_β យើងឱ្យវ៉ិចទ័រមិនសូន្យ X ដែល $X^t = (p_1, ..., p_N)$ ដោយ $p_i \in [0,1]$ និង $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$ ។ នោះ:

$\lim_{n\to\infty} (P_\beta)^n X = \pi$ (2)

ការភ្ជាប់ជាមួយនឹងទ្រឹស្តីចំនុចថេរបាណាច (Banach)

អត្ថបទខ្លីមួយទៀត នឹងបង្ហាញ ទ្រឹស្តីបទចំណុចថេរបាណាច។ ទ្រឹស្តីបទខាងលើ គ្រាន់តែជា ករណី ពិសេសនៃការអនុវត្តទ្រឹស្តីបទនេះតែប៉ុណ្ណោះ។ អ្នកអាចរំលងផ្នែកនេះ ប្រសិនបើមិនទាន់បានអានអត្ថបទខ្លីនោះ។ ពិតណាស់ថា

ទ្រឹស្តីបទ: ឱ្យម៉ាទ្រីស P ជាម៉ាទ្រីសចម្លងម៉ាកូវ។ យើងសង្កេត $S = \left\{ X / X^t = (p_1, ..., p_N), p_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{N} p_i = 1 \right\}$ ជាមួយនឹងចម្ងាយគ្រប់គ្រាន់ d(X,Y) រវាងចំណុច (ចំណុចនេះអាស្រ័យនឹងម៉ាទ្រីស P)។ នៅលើ S យើងសម្មតថាការីលីនេអ៊ែរ $L: S \to S$ កំណត់ដោយ L(X) = PX។ ការី L បានបង្រួមទៅរក S អាចពោលថាមានតម្លៃ $c \in [0,1]$ ហើយដែលសម្រាប់គ្រប់ $X, Y \in S$,

$d(L(X), L(Y)) \le c d(X,Y)$ ។

នោះមានវ៉ិចទ័រតែមួយគត់ $\pi \in S$ ដែល $L(\pi) = \pi$

ម៉្យាងវិញទៀត ឱ្យតម្លៃ $X_0 \in S$ យើងអាចកំណត់ស្វ៊ីត $\{X_n\}$ តាមវិចារកំណើន ដែល

$X_{n+1} = L(X_n)$ នោះ $\lim_{n\to\infty} X_n = \pi$ ។

និយមន័យចម្ងាយ d: និយមន័យចម្ងាយ d រាងស្មុគ្រស្មាញបន្តិច ហើយអាចរំលងចោលបាន ។ យើងទុកវាសម្រាប់អ្នកអានដែលត្រូវការភាពលម្អិត។ យើង សិក្សាត្រឹមករណីដែលម៉ាទ្រីស P ជាម៉ាទ្រីសខ្សែទ្រូង។ តាង $B = \{v_1 = \pi, v_2, ..., v_N\}$ ដែលជាមូលដ្ឋាននៃវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្គិន។ វ៉ិចទ័រ $X, Y \in S$ អាចបំបែកតាមវ៉ិចទ័រ B

$$X = \sum_{i=1}^{N} a_i v_i , Y = \sum_{i=1}^{N} b_i v_i$$

ដែល $a_i , b_i \in \mathbb{R}$ បន្ទាប់មកយើងកំណត់ថា:

$$d(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

ជាមួយនឹងចម្ងាយនេះ S គឺជាលំហម៉េទ្រីកពេញ មានន័យថា គ្រប់ស្វ៊ីតកូស៊ីរួមទៅរក។ ទ្រឹស្តីបទនេះ មិន គ្រាន់តែអះអាងពីអត្ថិភាពនៃវ៉ិចទ័រ π ប៉ុណ្ណោះទេ តែវាបានផ្តល់នូវវិធីសម្រាប់សង់វាទៀតផង ព្រោះវាជាភាពរួមនៃស្វ៊ីត $\{X_n\}$ ។ យើងធ្លាប់ឃើញការបកស្រាយនៃការបង្រួម នៅក្នុងឧទាហរណ៍របស់យើងហើយ។ តាមពិត ជួរឈរទី j នៃម៉ាទ្រីស P^n គឺជាវ៉ិចទ័រ $P^n e_j$ ដែល $e_j^t = (0,...,0,1,0,...,0)$ ជាវ៉ិចទ័រទី j នៃគ្រឹះកាណូនិច។ ពិតហើយ ក្នុងឧទាហរណ៍របស់យើង យើងអាចរកឃើញវ៉ិចទ័រ π ដោយផ្ទាល់ តាមរយៈការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការម៉ាទ្រីស (I-P)X=0

$$I - P = \begin{pmatrix} 1 & -\tfrac{1}{2} & -\tfrac{1}{3} & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -\tfrac{1}{3} & 0 & -\tfrac{1}{3} \\ 0 & -\tfrac{1}{2} & 1 & 0 & -\tfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\tfrac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\tfrac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

យើងអាចរកឃើញថា គ្រប់ចម្លើយមានទម្រង់ $(4S, \frac{16}{3}S, 3S, \frac{1}{3}S, S)^t$ សម្រាប់ $S \in \mathbb{R}$ ។ ចម្លើយត្រូវមានផលបូកកូអរដោនេ ស្មើ 1 ដូចនេះ π គឺ

$$\pi^t = (\frac{12}{41}, \frac{16}{41}, \frac{9}{41}, \frac{1}{41}, \frac{3}{41})$$

អនុវត្តន៍ការគណនារបាយមិនប្រែប្រួល

យើងរកឃើញវិធីសាស្ត្រងាយសម្រាប់ដោះស្រាយបញ្ហា។ ទោះជាយ៉ាងណាក៏ការ រករបាយមិនប្រែប្រួល π គឺវ៉ិចទ័រអ៊ីហ្ស៊ិន ដែលមានតម្លៃអ៊ីហ្ស៊ិន ១ សម្រាប់ម៉ាទ្រីស P_β ក្នុង (1) មិនមែនជាការងាយស្រួលទេ ពេលម៉ាទ្រីសនោះមានរាប់ពាន់លានជួរដេកនិងជួរឈរនោះ៖ រាប់ទាំងពេលវេលាចំណាយសម្រាប់គណនា និងអង្គចងចាំ នៃ ម៉ាស៊ីនកុំព្យូទ័រ ទាមទារការផ្ទៀវផ្ទាត់ណាស់។ វិធីធម្មតាសម្រាប់បំបាត់តួ ហ្គោស៍ (Gauss) មិនអាចប្រើបានទេនៅទីនេះ វាមានឧបសគ្គទាំងពីរយ៉ាង គឺទំហំនៃការគណនាដ៏ធំ និង ការចែកនឹងចំនួនមួយខិតទៅជិតសូន្យ។ ការដំណើរការ វិធីសាស្ត្រដែលមានប្រសិទ្ធភាព គឺការប្រើលក្ខណសម្បត្តិ(2) (មើល[LM])។ ទាំងនេះវាភ្ជាប់ជាមួយអត្ថបទខ្លី ស្តីពី ទ្រឹស្តីបទចំណុចនឹងបាណាចដែលពន្យល់វិធីសាស្ត្ររករកចំណុចនឹងមួយ។

ជាការពិតណាស់ យើងអាចចាប់ផ្តើមជាមួយ X_0 ដូចខាងក្រោម:

$$X_0^t = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N})$$

ហើយយើងត្រូវការការគណនា $\lim_{n\to\infty} (P_\beta)^n X_0$ ។ ជាធម្មតា $P_\beta^n X_0$ សម្រាប់ n នៅចន្លោះ ៥០ ទៅ ១០០ ឱ្យតម្លៃប្រហែល នៃ π ដ៏ប្រសើរ។ តាមវិចារកំណើន យើងគណនា $X_{n+1} = P_\beta X_n$ ។ ការគណនារបៀបនេះពិតជាវែងឆ្ងាយខ្លាំងណាស់។ តាមពិត ស្ពាបត្យកម្មម៉ាទ្រីស P_β ក្នុង (១) មិនមានធាតុ 0 ទេ។ ផ្ទុយទៅវិញ ធាតុរបស់ P មានសូន្យច្រើនណាស់។ ដូច្នេះ យើងត្រូវបំបែកការគណនាលេខ ដោយយកកត្តានេះជាសំខាន់ គឺថា

$$X_{n+1} = (1-\beta) P X_n + \beta Q X_n$$

ពីព្រោះទម្រង់ពិសេសនៃ Q វាងាយស្រាយបំភ្លឺណាស់ថា បើសិន X គឺជាវ៉ិចទ័រដែលផលបូកធាតុស្មើនឹង 1 នោះ $QX = X_0$ ។ ដូចនេះ វាគ្រប់គ្រាន់សម្រាប់ការគណនាស្វ៊ីត

$$X_{n+1} = (1-\beta)PX_n + \beta X_0$$

សន្និដ្ឋាន

យើងបានបង្ហាញផ្នែកទូទៅ នៃវិធីសាស្រ្តវិធីសាស្ត្រចាត់ថ្នាក់ទំព័ររបស់ហ្គូហ្គិល។ កន្លងមកអ្នកមានបទពិសោធន៍គ្រប់គ្រាន់ជាមួយនឹងគេហទំព័រធម្មតា និងការស្វែងរកល្បិច ដើម្បីធ្វើឱ្យប្រសើរឡើង ក្នុងការតម្រៀបនៃទំព័រ របស់អ្នកតាមរយៈការបន្ថែមបញ្ជាប់បរមាទាំងខាងក្នុង និងខាងក្រៅ។ ដោយសម្ងាត់ ការងារខ្លះដែលមានភាពឥតខ្ចោះ ទាមទារនូវការស្រាវជ្រាវបន្ត។ វា អាចដោះស្រាយបានដោយផ្លាស់ប្តូរម៉ាទ្រីស "អព្យាក្រិត" នៃម៉ាទ្រីស Q ក្នុង (១) ដោយម៉ាទ្រីសដែលស្តែងនូវលក្ខណៈពិសេសនៅលើវិប។ វិធីផ្សេងទៀត បញ្ជាក់ថាការចាត់ថ្នាក់ទំព័រ មិនមានអំពើរហ័ស គ្រប់គ្រាន់ធ្វើឱ្យប្រសើរឡើងចំពោះការរៀបចំហទំព័ររបស់ពួកគេនោះក៏ទាមទារវិសោធនកម្មផ្សេងទៀតដែរ

ជាសេចក្តីសន្និដ្ឋានទូទៅ តើយើងបានធ្វើការសង្កេតឃើញអ្វីខ្លះ? គំនិតវាងវៃដ៏សាមញ្ញ នាំទៅរករបកគំហើញដ៏ធំមួយ ដែលជាចលករវាររកដ៏សំខាន់ ហើយក៏ជាកំណើតនៃអធិរាជពាណិជ្ជកម្មធំមួយដែរ។ ទោះបីជាការគណនាជាក់ស្តែងមានភាពបត់បែនច្រើនជាងនេះក៏ដោយ ក៏ គំនិតដំបូងត្រូវការ "ធាតុដំបូង" នៃគណិតវិទ្យា ដែល ហៅថាពីជគណិតលីនេអ៊ែរ និងទ្រឹស្តីបទប្រូបាប៊ីលីតេ។ ទំនាក់ទំនងជាស្តង់ដានៃទ្រឹស្តីគណិតវិទ្យា ជាពិសេស ម៉ាទ្រីសអង្កត់ទ្រូងមានប្រសិទ្ធភាពជាខ្លាំង ពេលដែលគេយកវាទៅប្រើនៅខាងក្រៅនៃបរិបទធម្មតារបស់វា។ យើង ក៏មានផ្នែកសំខាន់ផងដែរ ដែលរួមផ្សំគំនិតក្នុងវិទ្យាសាស្រ្ត ដូចជា ជា មួយនឹងទ្រឹស្តីបទចំណុចនឹងបាណាច ដែលអនុវត្តន៍ ខុសដាច់ស្រឡះពីទម្រង់ដើមរបស់វា។

ឯកសារយោង:

[E] M. Eisermann, Comment Google classe les pages webb, http://images.math.cnrs.fr/Comment-Google-classe-les-pages.html, 2009.
[LM] A. N. Langville and C. D. Meyer, A Survey of Eigenvector Nethods for Web Information Retrieval, SIAM Review, Volume 47, Issue 1, (2005), pp. 135-161.
[RS] C. Rousseau and Y. Saint-Aubin, Mathematics and technology, SUMAT Series, Springer-Verlag, 2008 (A French version of the book exists, published in the same series).