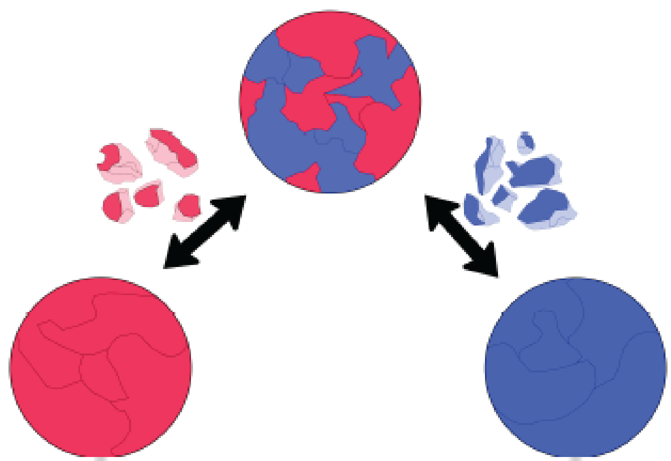
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

ប៉ារ៉ាដុក បាណាច-តាស្គី តើគណិតវិទ្យាចិញ្ចឹមពិភពលោកបែបណា?

និពន្ធដោយ ម៉ាយឃើល ឡក់យៀ និង អង់តូន ណិចទូ



តើអ្នកដែលគិតទេថា អ្នកយកក្រូចមួយមកពុះ ហើយបន្ទាប់មកផ្គុំ បំណែករបស់វាវិញ បង្កើតទៅជាក្រូចពីរ ប្រកបដោយទំហំ ដូចដើម? ក្នុងពិភពរបស់គណិតវិទ្យា យើងអាចធ្វើបាន។ ដើម្បីធ្វើការនេះបាន យើងត្រូវការឧបករណ៍ពិសេសខ្លះ ដូចជា ក្រុម ស្វ័យសត្យជម្រើស និងសំណុំមិនអាចកំណត់បាន។ ទាំងនេះគឺជា ប៉ារ៉ាដុក បាណាច -តាស្គី៖ យើងយកបាល់មួយមកច្រៀកជាច្រើនចំណែករាប់អស់ បន្ទាប់មកផ្គុំបានជាបាល់ពីរ ទំហំ ដូចដើម។

ស្រមៃថា តើវាអស្ចារ្យយ៉ាងណា បើសិនជាយើងអាចអនុវត្តនូវប៉ារ៉ាដុក បាណាច -តាស្គី ក្នុងពិភពពិតបាន! នោះយើងនឹងអាចបញ្ចប់នូវការស្រេកឃ្លាន ដោយវិធីបង្កើនទ្វេទឹក និងអាហារ។ ការដឹកជញ្ជូនទំនិញក៏មានការធូរស្រាល ព្រោះយើងអាចដឹកយកវត្ថុតែមួយ ហើយបង្កើតបន្ថែមជាច្រើន តាមចង់បាន។ យើងនឹងមានវត្ថុធាតុដើម ច្រើនឥតកំណត់ យើងអាចនឹងបង្កើតទ្វេនូវ ប្រេងឥន្ធនៈ ប្រាក់ មាស យើងអាចទាំងបង្កើតទ្វេនូវពិភពទាំងមូលផងទៀត! ម៉្យាងវិញទៀត ប៉ារ៉ាដុក បាណាច -តាស្គី ក៏អាចឱ្យយើងធ្វើផ្ទុយវិញ គឺយកបាល់ពីរ មកច្រៀកហើយធ្វើជាបាល់តែមួយ ដែលមានទំហំដូចមុន។ បញ្ហាចំបងនៃពិភពលោកក៏អាចដោះស្រាយបាន ព្រោះយើងអាចបន្ថយចំនួនកាកសំណល់ ឬឧស្ម័នកាបូនិកក្នុងបរិយាកាស។

ជាអកុសល យើងមិនអាចប្រើវាក្នុងពិភពពិតបានឡើយ។ គ្មាននរណាអាចប្រើប៉ារ៉ាដុកនេះ ដើម្បីបង្កើនចំនួនក្រូច ឬក៏អ្វីផ្សេងបានឡើយ។ បើទោះបីជាក្រូចកើតពីអាតូមមានចំនួនដ៏ច្រើន ក៏ប៉ុន្តែវានៅតែជាចំនួនរាប់អស់ ដូច្នេះហើយប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី មិនត្រឹមត្រូវទេក្នុងករណីនៃសំណុំរាប់អស់។

ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី បានត្រូវរកឃើញក្នុងឆ្នាំ ១៩២៤ ដោយ ស្តេហ្វិន បាណាច និង អាល់ហ្វ្រេត តាស្គី។ នេះមិនមែនជាប៉ារ៉ាដុកតាមន័យបុរាណកន្លងមកទេ ព្រោះវាមានការបកស្រាយ។ ក្នុងពេលជាមួយគ្នានោះ គណិតវិទូដទៃ ដូចជា ហ៊្វសដស បានសិក្សាពីរង្វាស់ (រង្វាស់គឺជាទូទៅកម្មនៃមាឌរបស់សំណុំ)។ ប៉ារ៉ាដុក ចាប់ផ្តើមពីការកំណត់ថា រាល់សំណុំ មានសញ្ញាណនៃមាឌ ប៉ុន្តែគេដឹងច្បាស់ថា រង្វាស់មិនអាចមានសម្រាប់សំណុំខ្លះ (បានន័យថា សញ្ញាណនៃមាឌមិនអាចប្រើលើសំណុំទាំងនោះបាន) ដែលគេហៅសំណុំតាំងនោះថា ជាសំណុំមិនអាចវាស់បាន។ ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី បានប្រើសំណុំបែបនេះ ដើម្បីបង្កើនចំនួនបាល់។ ដើម្បីធ្វើការនេះ យើងត្រូវការ ស្វ័យសត្យជម្រើស។ សូមអានផ្នែកចុងក្រោយដើម្បីលម្អិតពីរឿងនេះ។

ឥឡូវនេះដល់វេលាត្រូវពោលពីប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី ដ៏លំបាកនោះហើយ។ ដំបូងយើងសន្មតនូវអត្ថន័យមួយចំនួន។ ក្នុងអត្ថបទខ្លីនេះ យើងពិនិត្យតែករណីលំហអឺគ្លីតបីវិមាត្រ R^3 តែប៉ុណ្ណោះ។ វត្ថុពីរ A និង B ក្នុង R^3 កុងគ្រុយអង់នឹងគ្នា បើសិនជាវាមានទំហំប៉ុនគ្នា រាងដូចគ្នា ឬពោលតាមបច្ចេកទេសថា បើមានចម្ងាយមួយដែលរវាងវាទាំងពីរមានធាតុត្រូវគ្នា។ យើងសរសេរ ។ ឧទាហរណ៍ ត្រីកោណពីរកុងគ្រុយអង់នឹងគ្នា បើវាមានជ្រុងត្រូវគ្នាប្រវែងស្មើគ្នា និងមានរង្វាស់មុំត្រូវគ្នាប៉ុនគ្នា។

ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី

សន្មត A, B និង C ជាបំណែកនៃបាល់ ក្នុង R^3 នោះមាន $n \geq 5$, $k<n$ និងបំណែកសំណុំរងត្រូវគ្នា $A_1', A_2', \ldots, A_n'$, នៃ A, $B_1', B_2', \ldots, B_n'$, នៃ B,និង $C_1', C_2', \ldots, C_n'$, នៃ C, ដែល

- $A=A_1'\cup A_2'\cup\ldots\cup A_n'$, $B=B_1'\cup B_2'\cup\ldots\cup B_n'$ និង $C=C_1'\cup C_2'\cup\ldots\cup C_n'$
- $A_1'\cong B_1'\ldots A_k'\cong B_k'$ $A_{k+1}'\cong C_{k+1}'\ldots A_n'\cong C_n'$

ពោលបានម៉្យាងទៀតថា យើងបំបែក A ជា n ចំណែក ហើយផ្គុំ k ចំណែកបង្កើតជា B និង n-k ចំណែកដើម្បីបង្កើត C។ គួរកត់សម្គាល់ថា A,B,C មានទំហំប៉ុនគ្នា! បើសិនជាយើងធ្វើបែបនេះចំពោះក្រូចនោះ នោះយើងអាចបង្កើតជាក្រូចពីរមានទំហំប៉ុនមុន ហើយច្រាសមកវិញ ពីក្រូចពីរជាក្រូចមួយបាន។

មានសម្រាយបញ្ជាក់ [5] ដែលថាចំនួនចំណែកអប្បបរមាគឺ $n=5$ តែវានៅតែត្រឹមត្រូវជាមួយចំនួនជាច្រើន ដែលធំជាង ៥។ នៅក្នុងផ្នែកបន្ទាប់ យើងនឹងស្រាយបង្ហាញ ករណី $n=7$។ ប៉ារ៉ាដុកនេះនៅតែពិតសម្រាប់ករណីលំហវិមាត្រធំ។ លើសពីនេះ ពំនោលនៃ ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី ដែលពោលសម្រាប់ករណីបាល់ដែលងាយស្រួលនោះ ក៏នៅតែត្រឹមត្រូវពេលយើងជំនួសវាដោយបាល់ ជាសំណុំរងក្នុងលំហ R^m ដែល $m\geq 3$ ហើយមិនមែនជាសំនុំទទេ។

សម្រាយបញ្ជាក់សង្ខេប

សម្រាយបញ្ជាក់របស់ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី ពឹងលើលទ្ធផលមួយចំនួននៃទ្រឹស្តីបទក្រុម។ ក្នុងគណិតវិទ្យា ក្រុម គឺជាសំណុំមិនទទេ ប្រកបដោយ អនុវត្តក្នុង (គេច្រើនសរសេរដូចផលគុណ*) ដែលមានលក្ខណៈបីគឺៈ

- ប្រមាណវិធីមានលក្ខណៈបំបែក មានន័យថា $a.(b.c)=(a.b).c$ សម្រាប់គ្រប់ a,b និង c ក្នុង G
- G មានធាតុណឺត e, មានន័យថា $a.e=e.a$ សម្រាប់គ្រប់ a ក្នុង G
- គ្រប់ធាតុ a ក្នុង G មានចម្រាស មានន័យថា មានធាតុ a^{-1} ក្នុង G ដែល $a.\,a^{-1}= a^{-1}.a= e$

យើងស្គាល់ក្រុមបែបនេះជាច្រើនៈ សំណុំចំនួនសនិទានមិនសូន្យ ដែលមានប្រមាណវិធីគុណ, សំណុំនៃពហុកោណនិយ័ត ប្រកបដោយប្រមាណវិធីបន្សំនៃស៊ីមេទ្រី (ដែលគេតែងហៅថា) និងជាច្រើនផ្សេងៗទៀត។ ប៉ុន្តែ មិនមែនគ្រប់សំណុំជាក្រុមទេ ជាឧទាហរណ៍ ចំនួនគត់មិនសូន្យ ប្រកបដោយប្រមាណវិធីគុណ មិនមែនជាក្រុមទេ ព្រោះមានធាតុខ្លះមិនមានចម្រាសទេ។

នេះជាវិធីបង្កើតក្រុមៈ សន្មត s និង t ជាអក្សរពីរ ឬជាសញ្ញា ហើយសន្មត F_2 ជាសំណុំនៃគ្រប់ពាក្យដែលសរសេរដោយអក្សរ s, t, s^{-1} និង t^{-1} មានលក្ខខណ្ឌដែលថា បើ s និង s^{-1} នៅជាប់គ្នានោះយើងលុបវាទាំងពីរចោល ហើយដូចគ្នាដែរសម្រាប់ t និង t^{-1}។ ជាឧទាហរណ៍ $s, tst, t^{-1}sssts^{-1}$ ជាធាតុនៃ F_2។ យើងក៏សន្មតដែរនូវ «ពាក្យទទេ» ជាធាតុនៃសំណុំ F_2 ដែលមិនមានអក្សរអ្វីសោះ។ ដើម្បីភ្ជាប់ពាក្យពីរចូលគ្នា យើងដាក់ពាក្យទីពីរក្រោយពាក្យទីមួយ (ដោយពិនិត្យពីការលុបសម្រួល បើសិនជាមាន) ៖ ជាឧទាហរណ៍ បន្សំនៃពាក្យ tst និង $t^{-1}sssts^{-1}$ គឺ $tsssts^{-1}$ ។ ដូចនេះ F_2 ជាមួយប្រមាណវិធី លុបសម្រួល គឺជាក្រុម ដែលមានធាតុណឺតជា ពាក្យទទេ ដែលហៅថាជាក្រុមសេរី បង្កើតឡើងពីសំណុំ $\{s,t\}$។ វាច្បាស់ណាស់ថា គេអាចធ្វើទូទៅកម្មៈ បើ S ជាសំណុំនៃសញ្ញា យើងអាចបង្កើតក្រុម F_s ដោយបង្កើតសំណុំ S តាមវិធីដដែល។ ក្រុមសេរីមានតួនាទីសំខាន់ណាស់ក្នុងទ្រឹស្តីបទក្រុម ដោយហេតុថាមានសម្រាយបញ្ជាក់ថា គ្រប់ក្រុម អ៊ីសូម៉កហ្វីស ទៅនឹងសំណល់នៃក្រុមសេរី គឺមានន័យថា វិធីបង្កើតនិងការប្រើក្រុមសេរី គឺជាវិធី«បង្កើតក្រុម» នោះឯង។

ក្រុមមួយទៀតដែលមានប្រយោជន៍ដែរក្នុងទីនេះ គឺក្រុមនៃស៊ីមេទ្រីសនិទាន ក្នុងវិមាត្រ៣។ ក្រុមនេះគេហៅថា SO_3 ។ ប្រមាណវិធីនៃក្រុមនេះគឺ បន្សំ ព្រោះថារង្វិលពីរអាចធ្វើបន្សំៈ ស្រមៃថា បាល់មួយមានទិសដៅកំណត់មួយ បង្វិលវាទៅទិសដៅទីពីរ បន្ទាប់មកបង្វិលវាម្តងទៀតតាមទិសដៅទីបី។ ពិតណាស់ យើងបានបង្វិលវាពីទីតាំងដំបូងទៅទិសដៅទីបី ដែលជាបន្សំនៃរង្វិលពីរ។

សម្រាយបញ្ជាក់តទៅនេះ យកពី [2] (ក្នុងឯកសារយោង)

ដើម្បីបកស្រាយប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី យើងនឹងប្រើ ឡេម្មម៉ាបួន។ ទោះយ៉ាងណាក៏បំណកស្រាយនេះ មានលក្ខណៈបច្ចេកទេសខ្លាំងក្លា ហើយយើងនិងរំលងផ្នែកខ្លះ។ សូមអាន [1] ដើម្បីលម្អិត ឬ [4] សម្រាប់ការបកស្រាយទាំងស្រុង។ តទៅនេះ យើងសន្មតថា A,B និង C ជាបាល់ក្នុង R^3 ដែលមានកាំ 1 និងផ្ចិត $a=(0,0,0)$, $b=(0,0,3)$ និង $c=(0,0,-3)$ត្រូវរៀងគ្នា។

បទគន្លឹះ១៖ មានក្រុមរង G នៃ $SO(3)$ កើតឡើងពីរង្វិលពីរ s និង t ក្នុង $SO(3)$ ដែលអ៊ីសូម៉កហ្វីសនឹង F_2។

ពោលបានម្យ៉ាងទៀតថា មានក្រុមរង G នៃ $SO(3)$ ដែលដូចប្រាកដទៅនឹងក្រុមសេរី F_2។ យើងអាចនឹកមើលពីពាក្យក្នុង F_2 ដូចជារង្វិលបន្តបន្ទាប់ s,t,s^{-1},t^{-1} ដែល s^{-1}ជារង្វិលដូច s ដែរតែមានទិសដៅផ្ទុយ ហើយក៏ដូចគ្នានេះដែរសម្រាប់ t^{-1}។ ចាប់ពីពេលនេះទៅ យើងមិនរំលេចភាពខុសគ្នារវាង G និង F_2 ទៀតទេ មានន័យថា យើងនឹងប្រដូចធាតុរបស់ G ថាជាពាក្យ ឬក៏ជារង្វិល តាមតម្រូវការ។

ដើម្បីឃើញការងារនេះ យើងយកឧទាហរណ៍ s និង t ជុំវិញអ័ក្សកែងពីរ ហើយជារង្វិលតាមមុំដូចគ្នា។ តាមរបៀបនេះ ទោះជាយើងផ្សំ s,t, s^{-1},t^{-1} យើងនឹងមិនអាចទទួលទម្រង់ដើមដំបូងវិញដែរ។ លើសពីនេះ ពីរពាក្យ សរសេរដោយ s,t, s^{-1},t^{-1} ត្រូវគ្នារង្វិលពីរក្នុង $SO(3)$។

បើ H ជាសំណុំរងនៃ G សន្មត sH ជាសំណុំពាក្យកើតពីការបន្ថែម s ពីមុខគ្រប់ពាក្យក្នុង H។ ឧទាហរណ៍ បើ $H=\{tst^{-1},s^{-1}tt\}$ នោះ $sH=\{stst^{-1},tt\}$

បទគន្លឹះ២៖ មានគូសំណុំរងដាច់ពីគ្នា H_1, H_2, H_3, H_4 នៃ G ដែលមិនមានធាតុណឺត ហើយ៖

$$G=sH_1 \cup tH_2$$
$$G=s^{-1} H_3 \cup t^{-1} H_4$$
$$sH_1 \cap tH_2=\emptyset$$
$$s^{-1} H_3 \cap t^{-1} H_4=\emptyset$$

ឡែមម៉ានេះពោលថា យើងអាចចែកក្រុម G ជាពីរចំណែក តាមរបៀបពីរផ្សេងគ្នា តាមទំនងងាយស្រួលដែលអាចកាត់ពុះបាល់បាន។

យើងនឹងបង្កើតសំណុំរង H_1, H_2, H_3, H_4។ តាង $W(s)$ សំណុំនៃពាក្យក្នុង G ចាប់ផ្តើមដោយ s ធ្វើដូចគ្នានេះសម្រាប់ t, s^{-1},t^{-1} ។ តាង $W(st^{-1})$ សំណុំនៃពាក្យចាប់ផ្តើមដោយ st^{-1} ។ល។

យើងអាចកំណត់ $H_1=W(s^{-1})$, $H_2=W(t^{-1}s)$, $H_3=W(s)$និង $H_4=W(ts^{-1})$។ ច្បាស់ណាស់ថា សំណុំទាំងនេះកាត់ដាច់ពីគ្នា ហើយគ្មានមួយណាដែលមាន ពាក្យទទេ សោះឡើយ។ ជាការងាយស្រួលនឹងផ្ទៀងផ្ទាត់លក្ខខណ្ឌទាំបួននៃឡែមម៉ា។

ក្រុម G ដែលមានអំពើលើបាល់ A៖ ពិតណាស់ បង្វិលបាល់តាមធាតុនៃ G គឺគ្រាន់តែប្តូរទីចំណុចនៅលើបាល់។ បើឱ្យចំណុច x មួយលើបាល់ A នោះយើងអាចកំណត់សំណុំចំណុចនៃA ដែល x អាចទៅដល់បន្ទាប់ពីរង្វិលក្នុង G។

តាង y ជាធាតុនៃ A នៅក្នុងរង្វិលនៃ x ។ ពោលម្យ៉ាងទៀតថា មានរង្វិល $c\in G$ ដែល y ជារូបភាពរបស់ x ដោយអំពើរបស់ c។ ប៉ុន្តែផ្ទុយមកវិញ x ជារូបភាពរបស់ y ដោយ c^{-1} ដូចនេះ x នៅក្នុងគន្លងរបស់ y។ ងាយស្រួលណាស់ ដើម្បីមើលឃើញថា y មានគន្លងដូច x ឬក៏ជាទូទៅ គ្រប់ពីរចំណុចនៃគន្លង x ស្ថិតក្នុងគន្លងតែមួយ។ សន្មត x និង x'ជាធាតុនៃ A ដែល x និង x' មានគន្លងផ្សេងគ្នា។ បើដូច្នេះ ធាតុ $y\in A$ មិនអាចស្ថិតនៅក្នុងគន្លងទាំងពីរនៃ x និង x'បានទេ។ ពិតណាស់ ក្នុងករណីដែល x មានគន្លងដូច y ដែល y មានគន្លងដូច x' មានន័យថា x មានគន្លងដូច x' ។ ដូចដែលយើងធ្លាប់បានពោលរួចមកហើយថាមិនអាចមានការត្រួតគ្នានៃគន្លងពីរបានទេ ប្រសព្វគឺទទេ ជាវិបាកគឺគន្លង A បង្កើតនូវផ្នែក A។

ផ្នែកកាត់គ្នាដែលមានអំពើរបស់ G លើ A គឺជាសំណុំរងនៃ A ដែលមានធាតុតែមួយគឺ x នៃគន្លងពិសេសមួយ។ ដើម្បីបង្ហាញអត្ថិភាពនៃផ្នែកកាត់គ្នានេះ យើងត្រូវការ ស្វ័យសត្យនៃជម្រើស។

បើ H ជាសំណុំរងនៃ G ហើយ A'ជាសំណុំរងនៃ A នោះយើងកំណត់ HA' ជាសំណុំនៃរូបភាពរបស់ធាតុ A' ដោយធាតុរបស់ A' មានន័យថា $HA' =\{h(x)|h\in H, x\in A\}$ ដែល $h(x)$ ជារូបភាពនៃ x ដោយរង្វិល h។ ដូចគ្នានេះដែរ បើ s ជាធាតុនៃ G យើងសរសេរ $sA'=\{s(x)|x\in A'\}$។

បទគន្លឹះ៣៖ មានគូសំណុំរងដាច់ពីគ្នា A_1, A_2, A_3, A_4 នៃ A ដែលប្រជុំរបស់វា ជាសំណុំរងរបស់ A ហើយ៖

$$A=sA_1 \cup tA_2$$
$$A=\{a\} \cup s^{-1} A_3 \cup t^{-1} A_4$$
$$sA_1 \cap tA_2=\emptyset$$
$$s^{-1} A_3 \cap t^{-1} A_4=\emptyset$$

ឥឡូវ យើងយើងកាត់ផ្នែកនៃបាល់ A ដោយប្រើ ការបំបែក G តាមឡែមម៉ា ២។

តាង X ជាផ្នែកកាត់គ្នានៃអំពើរបស់ G លើ A ។ តាង $A_1=H_1X \cup \{a\}$, $\tilde{A}_2=H_2X$, $\tilde{A}_3=H_3X$, $\tilde{A}_4=H_4X$, $A_2= \tilde{A}_2\backslash\{t^{-1}sA_1 \cap \tilde{A}_2 \}$, $A_3=\tilde{A}_3\backslash\{ts^{-1}\tilde{A}_3\cap A_4\}$

យើងចាប់អារម្មណ៍ថា គ្មាន A_i ណាមួយដែលមានរួមផ្សំ ដោយធាតុ X ដូចនេះប្រជុំរបស់វា ជាសំណុំរងនៃA។ លើសពីនេះ យោងតាមនិយមន័យ នៃ X ដែលថា $A=GX\cup\{a\}$។ ចាប់ពីត្រឹមនេះ មានភាពងាយស្រួលក្នុងការផ្ទៀងផ្ទាត់ឡែមម៉ា។

បទគន្លឹះ៤៖ មានគូសំណុំរងដាច់ពីគ្នា B_1, B_2, C_1, C_2 , C_3 និង អនុគមន៍$F: B\cup C \to A$ ដែល៖

$B= B_1 \cup B_2$ និង $C= C_1 \cup C_2 \cup C_3$

លើសពីនេះ សំណុំ $f(B_1)$, $f(B_1)$, $f(B_2)$, , $f(C_1)$, $f(C_2)$, $f(C_3)$ ជាគូសំណុំរងដាច់ពីគ្នា ហើយរាល់អំពើនៃ f លើ B_i និង C_i គឺជាអនុគមន៍រក្សាចម្ងាយ។

នៅទីនេះ យើងចាប់ផ្តើមបង្កើតភាពត្រូវគ្នារវាងផ្នែកនៃA និងផ្នែកនៃ B និង C។

សន្មត B_1 ជារូបភាពរបស់ A_1 តាមអនុគមន៍ $x \to sx+b$។ ដោយអនុគមន៍នេះគ្រាន់តែជា បន្សំរវាងរង្វិលនិងរំកិល តាមរយៈការរក្សាចម្ងាយនិងត្រូវគ្នា យើងបាន A_1 និង B_1 កុងគ្រុយអង់។ តាមវិធីដដែលយើងអាចបង្កើតកុងគ្រុយអង់រវាងA_2 និង B_2 , A_3 និង C_1, A_4 និង C_3។ ផ្នែកកណ្តាលនៃ C មិនទាន់ត្រូវគ្នានិងអនុគមន៍ណាសោះ ដូចនេះយើងរើសចំណុចមួយពីក្នុង A ដែលមិនមែនជារបស់ A_i ណាមួយ (ជាឧទាហរណ៍យកពីក្នុង X)ហើយធ្វើអនុគមន៍វាទៅ c។ f គ្រាន់តែជាប្រជុំ នៃចម្រាសអនុគមន៍ទាំងនេះ។ គេអាចបញ្ជាក់បាន (ដោយជំនួយពីឡែមម៉ាមុន) ថា ស្របតាមលក្ខខណ្ឌរបស់ឡែមម៉ានេះ។

ពេលនេះ យើងអាចបកស្រាយ ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី បានហើយ។

យើងតាង $D=B\cup C$។ ស្របតាមឡែមម៉ា៤ យើងមានអនុគមន៍មួយទល់មួយ $f: D\to A$ ដែលជាបណ្តាក់មួយនៃ ការរក្សាចម្ងាយ។ យើងក៏តាង $g: A\to D$ ជារំកិលនៃ b។ បើយើងរើសធាតុមួយនៃ A (ត្រូវគ្នាក្នុង D) វាអាចមានអនុគមន៍ទៅ D (ត្រូវគ្នាក្នុង A) ហើយបន្ទាប់មក ឆ្លងទៅ A (ត្រូវគ្នាក្នុង D) ម្តងទៀត និងជាបន្តបន្ទាប់។ យើងចង់ដឹងថា តើមានអ្វីកើតឡើង បើសិនជាយើងធ្វើបញ្ច្រាសទៅវិញ: រើសចំណុច x មួយក្នុង A តើមានធាតុ y ណាមួយក្នុង D ដែល $x= f(y)$? បើយ៉ាងនោះមែន តើមានធាតុ x' ក្នុង A ដែល $y= g(x')$? ហើយបន្តបន្ទាប់តទៅ។ បាតុភូតរបៀបនេះ គេហៅថា «ការស្រាវជ្រាវរកជីដូនជីតា»។ បាតុផ្ទុតនេះអាចចប់ (ឧទាហរណ៍បើសិនជា $y\epsilon C$) ឬមួយក៏វានៅតែដដែលៗ។ ពេលនោះយើងអាចចែកA និង D ដូចតទៅ៖

$A_f= \{x\in A$ | ការស្រាវជ្រាវរកជីដូនជីតា ចប់នៅ$D\}$

$A_g= \{x\in A$ | ការស្រាវជ្រាវរកជីដូនជីតា ចប់នៅ$A\}$

$A_\infty= \{x\in A$ | ការស្រាវជ្រាវរកជីដូនជីតា មិនចេះចប់$\}$

ហើយដូចគ្នានេះដែរ សម្រាប់ D_f , D_g , D_∞ ។

យើងឃើញថា $f: D_f \to A_f$ ជាអនុគមន៍ត្រូវគ្នា ហើយក៏ដូចគ្នាដែរ $g: D_g \to A_g$ និង $f: D_\infty \to A_\infty$ ។ ដូចនេះ តាមឡែមម៉ា ៤ លទ្ធផលគឺ៖

$B_i' = B_i \cap (D_f \cup D_\infty)$, $i=1,2$;
$B_3' = B \cap D_g$;
$C_i' = C_i \cap (D_f \cup D_\infty)$, $i=1,2,3$;
$C_4' = C \cap D_g$;
$A_i' = f(B_i')$ $i=1,2$;
$A_3' = g^{-1} (B_3')$
$A'_{i+3} = f(C_i')$ $i=1,2,3$;
$A_7' = g^{-1} (C_4')$

គំនិតសំខាន់មួយចំនួន

ឆ្លងកាត់ការស្រាយបញ្ជាក់ យើងប្រទះឃើញនូវគំនិតសំខាន់មួយចំនួនក្នុងគណិតវិទ្យា ហើយយើងនឹងធ្វើចំណាប់អារម្មណ៍ខ្លះ។

ភាពអាចវាស់បាន

ក្នុងគណិតវិទ្យា របស់មួយដែលយើងតែងចង់ដឹង គឺ«ទំហំ» នៃសំណុំ។ ជាឧទាហរណ៍ បើយើងធ្វើការជាមួយចំនួនពិត $\mathbb{R}$ ហើយមានសំណុំ $(0,1)$ វាសមរម្យណាស់ ដែលគិតថាវាមានទំហំ 1 (ជាប្រវែង)។ បើមានសំណុំ $(-2,0)\cup [5,6]$ នោះប្រវែងសរុបគឺ 3 ដូចនេះយើងគិតថា វាមានទំហំ 3 ។ បើយើងមានតែចំណុចមួយ ដូចជា $\{o\}$ នោះវាគ្មានទំហំទេ អញ្ចឹងវាមានទំហំ 0

ទោះបីជាសំណុំនោះមិនទទេក៏ដោយ។ ដូច្នេះក្នុងវិមាត្រមួយ យើងអាចគិតពី«រង្វាស់» នៃសំណុំដូចជាប្រវែងសរុបនៃអង្កត់ទាំងអស់នៃសំណុំ។

ដូចខាងលើនេះដែរ បើយើងធ្វើការក្នុង $\mathbb{R}^2$ សញ្ញាណនៃរង្វាស់ អាចនឹងគិតពីផ្ទៃសរុប ជាឧទាហរណ៍ $(0,1)x(0,1)$ នឹងមានទំហំ ១ ហើយ $(0,1)x\{0\}$ នឹងមានទំហំ ០ ។

សញ្ញាណនៃរង្វាស់នឹងមានសារៈសំខាន់ ពេលដែលយើងធ្វើការសរុបបញ្ចូល ដែលយើងត្រូវដឹងពីលីមីត នៃអនុគមន៍សរុបតាមផ្ទៃទាំងនោះ។ ការងារបែបនេះវាសម្រួលកាន់តែខ្លាំងដល់ករណី ដែលអនុគមន៍កំណត់ក្នុង $\mathbb{R}^n$ ប៉ុន្តែពេលខ្លះក៏មានករណីយើងធ្វើការសរុបបញ្ចូល សម្រាប់អនុគមន៍ ដែលមានសញ្ញាណនៃទំហំ (ប្រវែង ក្រឡាផ្ទៃ មាឌ ។ល។) មិនច្បាស់លាស់។ ពេលនោះ សញ្ញាណនៃ «រង្វាស់» បានត្រូវវិវឌ្ឍ។ សន្មតសំណុំ S រង្វាស់វាជាចំនួន មានន័យថា រាល់សំណុំរងនៃ S មានរាងជា σ-ពីជគណិត ។ ចំនួនដែលកំណត់គិតទៅតាមទំហំនៃសំណុំរង។ ជាញឹកញយ មានវិធីជាច្រើន (លើសពីមួយ) សម្រាប់វាស់សម្រាប់សំណុំ។ វិធីដែលរៀបរាប់ខាងលើ ដែលប្រើសម្រាប់វាស់សំណុំរង S នៃ $\mathbb{R}$ ក្នុង σ-ពីជគណិត គឺប្រវែងសរុបនៃអង្កត់នៃ S ហៅថា រង្វាស់ឡេប៊ែស។ នៅមានរង្វាស់សាមញ្ញមួយទៀត ដែលភ្ជាប់ 0 ទៅនឹងរៀងរាល់សំណុំរង ក្នុង σ-ពីជគណិត។ រង្វាស់សាមញ្ញមិនមានការប្រើប្រាស់ទូលំទូលាយទេ ដោយហេតុថា រាល់សំណុំមិនមានទំហំសោះឡើយ។ ដូចនេះ ពេលដែលនិយាយពីរង្វាស់នៃសំណុំរង $\mathbb{R}$ គេតែងត្រូវការ រង្វាស់ឡេប៊ែស ព្រោះវាអាចបង្ហាញសញ្ញាណអព្ភន្តរញាណនៃទំហំសំណុំរងរបស់ $\mathbb{R}$ ។

គេដឹងថា មិនមែនគ្រប់សំណុំរងនៃ $\mathbb{R}$ អាចវាស់ដោយ រង្វាស់ឡេប៊ែស បាននោះទេ។ សំណុំរងបែបនោះដំបូងត្រូវបានរកឃើញនៅក្នុងឆ្នាំ ១៩០៥ ដោយហ្គីសែប វីតាលី ហើយគេហៅវាថា សំណុំវីតាលី។ នេះគឺជាសំណុំរងនៃ ដែលយើងមិនអាចឱ្យសញ្ញាណនៃរង្វាស់ច្បាស់លាស់ ចំពោះសំណុំរងរបស់វា។ ចំណុចរបត់នៃសញ្ញាណរបស់សំណុំវីតាលី គឺស្វ័យសត្យជម្រើស ដែលស្តែងថា សម្រាប់រាល់សំណុំដែលមិនអាចវាស់ដោយ រង្វាស់ឡេប៊ែស បាន ត្រូវការស្វ័យសត្យជម្រើស។

ក្នុងប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី សំណុំដែលបាល់បានបំបែក មុននឹងផ្គុំទៅវិញជាបាល់ពីរនោះ វាជា សំណុំមិនអាចវាស់បានដោយរង្វាស់ឡេប៊ែស ដូចនេះវាមិនមានសញ្ញាណនៃរង្វាស់ទេ ដូចនេះសញ្ញាណនៃការរក្សាមាឌក៏មិនដំណើរការដែរ។

បំណែក និងទំនាក់ទំនងសមមូល

ដូចដែលយើងបានឃើញក្នុងបំណាកស្រាយនៃបំណែករបស់បាល់ ក្នុងគណិតវិទ្យាយើងត្រូវការរកបំណែកនៃសំណុំ គឺថាត្រូវបំបែកសំណុំជាសំណុំរង (អាចច្រើនរាប់មិនអស់) ដែលមានគូដាច់ពីគ្នា ហើយមានប្រសព្វជាសំណុំទាំងមូល។ ជាឧទាហរណ៍ ពិនិត្យសំណុំនៃឯកសារក្នុងកុំព្យូទ័ររបស់យើង។ បំណែកក្នុងសំណុំនេះ គឺជាថតឯកសារ។ វិធីមួយនៃការបែងចែកសំណុំនេះ គឺចែកជាថតសម្រាប់រូបថត ថតសម្រាប់វីដេអូ ថតសម្រាប់អ្វីផ្សេងៗទៀត។ មានវិធីជាច្រើនទៀត ដើម្បីចែកសំណុំនេះ តែក្នុងពីជគណិត យើងមានវិធីសាស្ត្រងាយស្រួល គឺ៖ ប្រើថ្នាក់សមមូល។ ទំនាក់ទំនងសមមូល ក្នុងសំណុំ គឺជាទំនាក់ទំនងរវាងធាតុនៃសំណុំនោះ ដែលប្រកបដោយលក្ខណៈ ប្រាស ឆ្លុះ និងឆ្លង។ ដូចនេះ ថ្នាក់សមមូលនៃ x គឺជាសំណុំរងនៃធាតុទាំងអស់របស់សំណុំ ដែលសមមូលនឹង x ។ វាមើលឃើញងាយណាស់ ដែលថាថ្នាក់សមមូលបង្កើតបានជាបំណែកនៃសំណុំ។ ជាឧទាហរណ៍ «មានតំណភ្ជាប់ឯកសារដូចគ្នា» គឺជាទំនាក់ទំនងសមមូលនៃសំណុំឯកសារ ក្នុងកុំព្យូទ័ររបស់យើង។ ថ្នាក់សមមូលគឺជា សំណុំរងនៃឯកសារ *JPEG* ទាំងឡាយ សំណុំរងនៃឯកសារ *pdf* ទាំងឡាយ ។ល។ ម្យ៉ាងទៀត កុងគ្រុយអង់ គឺជាទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុងសំណុំត្រីកោណទាំងអស់។ ទំនាក់ទំនងសមមូលមាននៅទីជាច្រើន ហើយវាបានជួយយើងឱ្យបង្កើតបាននូវបំណែងចែកដ៏សំខាន់ ហើយក៏មានន័យថាជាឧបករណ៍ប្រកបដោយអានុភាពនៃគណិតវិទ្យា។

យើងបានឃើញរួចមកហើយ នូវទំនាក់ទំនងសមមូលក្នុងបំណាកស្រាយនៃ ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី ៖ «មានគន្លងជាមួយគ្នា» ក្រោមអំពើនៃ G ដែលជាទំនាក់ទំនងសមមូលនៃធាតុរបស់ A ដែលថ្នាក់សមមូលគឺជាគន្លង។ មានឧទាហរណ៍ជាច្រើនទៀតនៃទំនាក់ទំនងសមមូល និងថ្នាក់សមមូល ក្នុងពីជគណិត ឧបមាបើ N ជាក្រុមរងណ័រម៉ាល់ នៃក្រុម H នោះ «ស្ថិតនៅក្នុងសហាសំណុំនៃ N » ជាទំនាក់ទំនងសមមូលនៃធាតុរបស់ H ហើយថ្នាក់សមមូលគឺ សហាសំណុំ។ ហេតុអ្វីបានជាយើងចូលចិត្តទំនាក់ទំនងសមមូល ព្រោះថាវាងាយស្រួល៖ វាបានបង្កើតនូវទម្រង់មួយនៃបំណែក ដូចជាសហាសំណុំនៃ N ដែលផ្តល់នូវសំណល់ផលចែក H/N ជាទម្រង់នៃក្រុម។

ស្វ័យសត្យជម្រើស

នៅដើមសតវត្សទី២០ គោលដៅសំខាន់មួយរបស់អ្នកគណិតវិទ្យា គឺខំស្វែងរកនូវបណ្តុំរាប់អស់នៃស្វ័យសត្យ ដែលគណិតវិទូអាចពឹងផ្អែកលើបាន (ដោយប្រើច្បាប់តក្កវិទ្យា)។ ទោះជាយ៉ាងណា ហេតុការណ៍នេះបានបង្ហាញដោយ ខឹត ហ្គូដែល ថា វាមិនអាចកើតមានបណ្តុំបែបនេះទេ ព្រោះថាមានស្វ័យសត្យជាច្រើនទៀត ដែលមានសារៈសំខាន់ និងជាគ្រឹះ សម្រាប់គណិតវិទ្យា។ គោលការណ៍រួម ដើម្បីគ្រឹះបែបនេះ គឺការប្រើវាក្យសព្ទសំណុំ។ បើយើងអាចកំណត់ថាតើសំណុំនោះជាអ្វី នោះយើងអាចនឹងទាញយកផល (ដោយប្រើស្វ័យសត្យបន្ថែម) គណិតវិទ្យាដទៃទៀតបាន (សូមអាន ****** ពីការវែកញែករឿងនេះ)។ ជាប្រវត្ត ស្វ័យសត្យដំបូងនៃទ្រឹស្តីបទសំណុំ បង្កើតដោយ អ៊ឺន ហ្សែរមែឡូ (ដែលក្រោយមកបានកែបន្តិចដោយ អាប្រាហាម ហ្វ្រែនខិល) ហើយវាក៏នៅតែជាស្វ័យសត្យទូទៅឌេលប្រើទើសសព្វថ្ងៃ (ពិតណាស់ថាមានរបៀបជាច្រើនទៀត)។ ស្វ័យសត្យមួយក្នុងចំណោមស្វ័យសត្យដែលស្នើដោយហ្សែរមែឡូ គឺស្វ័យសត្យនៃជម្រើស។ វាបានពោលថា៖ សន្មតថាមានបណ្តុំនៃសំណុំ(មិនទទេ) នោះអាចជ្រើសយកធាតុមួយពីរាល់សំណុំ។ មើលទៅវាហាក់ដូចជាកើតឯកឯង ប៉ុន្តែត្រូវបានបង្ហាញប្រកបដោយភាពចម្រូងចម្រាស ជាពិសេសនៅពាក់កណ្តាលដើមសតវត្សទី ២០។ មូលហេតុមួយក្នុងនោះ វាបានអះអាងពីអត្ថិភាពវត្ថុ ដែលមិនអាចបង្កើតដោយវិធីផ្សេងទៀត។ ជាឧទាហរណ៍ គេអាចបង្ហាញដោយប្រើស្វ័យសត្យជម្រើសថា មានតម្រៀបរៀបរយនៃចំនួនពិត ដែលមិនអាចបង្ហាញដោយវិធីផ្សេងក្រៅពីការប្រើស្វ័យសត្យនៃជម្រើស។ លើសពីនេះ ស្វ័យសត្យនៃជម្រើស អាចបង្ហាញពីអត្ថិភាពនៃសំណុំដែលមិនអាចវាស់បាន ហើយមួយភាគក៏បង្ហាញពី ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី។ គេអាចបង្ហាញថា ស្វ័យសត្យជម្រើស ត្រូវការដើម្បីបកស្រាយ ប៉ារ៉ាដុក បាណាច តាស្គី ដែលគ្មានវា គេមិនអាចបង្កើតនូវបំណែងចែកសមស្របបានឡើយ។ លទ្ធផលមិនអព្ភន្តរញ្ញាណបែបនេះ នាំមកនូវការលំបាកជាច្រើនដល់ ស្វ័យសត្យជម្រើស ក្នុងភាពជាស្វ័យសត្យ។ សព្វថ្ងៃនេះ គណិតវិទូភាគច្រើនទទួលយក ស្វ័យសត្យនៃជម្រើស ដោយគ្មានសង្ស័យ។ គណិតវិទ្យាទំនើបភាគច្រើន ឈរលើមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃស្វ័យសត្យជម្រើស បើដកតួនាទីនៃស្វ័យសត្យនេះ ចេញម្ល៉េះសមលទ្ធផលជាច្រើនត្រូវបំផ្លាញ។

សន្និដ្ឋាន

យើងបានធ្វើរឿងដែលមិនគួរកើត ពីបាល់មួយទៅជាពីរ។ តាមអព្ភន្តរញ្ញាណ វាមិនដំណើរការទេ តែសម្រាប់គណិតវិទ្យា អព្ភន្តរញ្ញាណអាចមិនយកជាត្រីមុខ ជាពិសេសសម្រាប់ករណីសំណុំរាប់មិនអស់។ ជាការពិត សញ្ញាណនិងគំនិតដែលយើងផ្សាភ្ជាប់ ដូចជា ភាពអាចវាស់បាន និងស្វ័យសត្យជម្រើស អាចបង្កើតបានជាលទ្ធផលគួរភ្ញាក់ផ្អើល ទោះជាវាកើតពីគំនិតយ៉ាងសាមញ្ញក៏ដោយ។ ប៉ារ៉ាដុកនេះ ក៏ជាឱកាសដើម្បីប្រើប្រាស់នូវលទ្ធផលពីផ្នែកជាច្រើននៃគណិតវិទ្យា៖ វិភាគ (ដោយភាពអាចវាស់បាន) ទ្រឹស្តីបទក្រុម (ដោយក្រុមសេរី) ពីជគណិត (ដេ◌ោគន្លងនិងបំណែក) តក្កវិទ្យា (ដោយស្វ័យសត្យនៃជម្រើស)។

ឯកសារយោង

[1] Wagon, Stan, ‘*The Banach-Tarski Paradox*‘, Cambridge University Press, 1985.
[2] Beals, Richard, ‘*Analysis – An Introduction*‘, Cambridge University Press, 2004.
[3] Jech, Thomas, J, ‘*The Axiom of Choice*‘, Dover Publications, 1973.
[4] Stromberg, Karl, ‘*The Banach-Tarski Paradox*‘, The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 3 (Mar., 1979), pp. 151-161.
[5] Robertson, R. M., ‘*On the Decomposition of Spheres*‘, Fund. Math. 34 (1947), 246-260.