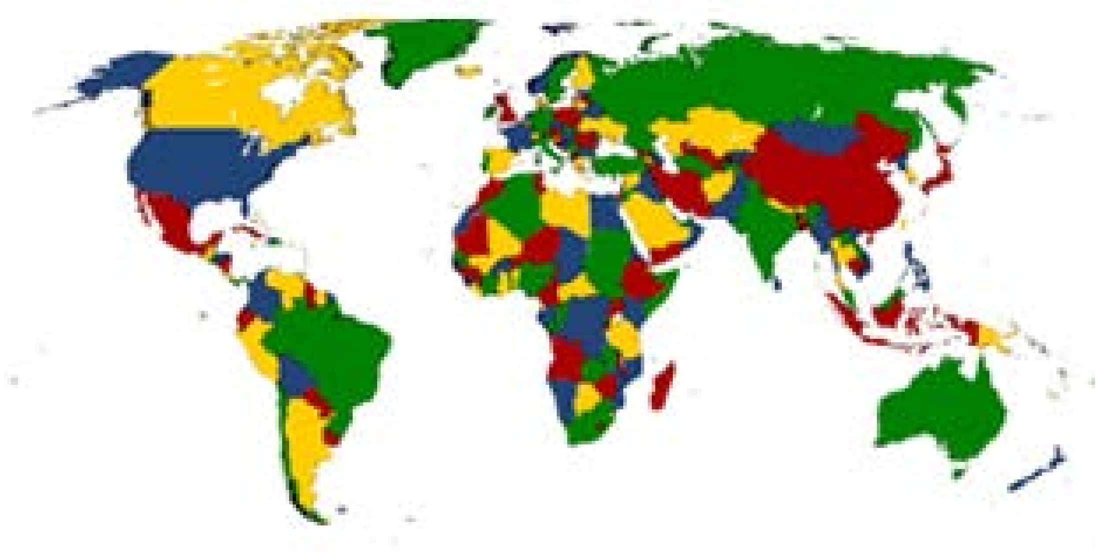
ការផាត់ពណ៌ផែនទី និងមូលដ្ឋានគ្រឹះ គ្រូបណ័រ (Map colouring and Gröbner Bases)



រូបភាពនេះជាកម្មសិទ្ធិរបស់ mathscareers.orgដែលអនុញ្ញាតឱ្យប្រើប្រាស់ក្នុងការងារនេះ

អ្នកនិពន្ធនេះបានចាប់កំណើតនៅក្នុងទីក្រុង *Marcelo EscuderioHermandes*។ គាត់ល្បី ល្បាញ ដោយសារ «ទ្រឹស្តីបទបួនពណ៌» *“Four Colour Theorem ”* យើងត្រូវការផាត់តែបួនពណ៌ប៉ុណ្ណោះនៅលើផែនទីពិភពលោក ដើម្បីមិនឱ្យមានពណ៌ដូចគ្នានៅជាប់សងខាង ព្រំដែនណាមួយសោះ ឡើយ ។ ការប្រើសមីការពហុធា និងមូលដ្ឋាន គ្រូបណ័រ (*Gröbner*) យើងចង់កំណត់ថា តើពណ៌តែបី អាចគ្រប់គ្រាន់ដែរឬទេសម្រាប់ផាត់ពណ៌លើផែនទីពិភពលោកនោះ?

១ .ការផាត់ពណ៌ផែនទី

ទ្រឹស្តីបទបួនពណ៌ ដែលល្បីថែងថា ផែនទីទាំងអស់ទាំងនៅក្នុងប្លង់ឬនៅក្នុងស្វ៊ែរអាចផាត់ដោយពណ៌តែបួន ដោយមិនមានពណ៌តំបន់ជិតខាងពីរដូចគ្នាទេ។ វាជាការងាយស្រួលណាស់ក្នុងការបង្កើតឧទាហរណ៍នៃផែនទីដែលមិនអាចផាត់តែបីពណ៌ ឬក៏ អាចផាត់ពណ៌បាន (ស្របតាមលក្ខខណ្ឌខាងលើ) ។ វិធី ដែលកណត់ថា បើមានតែបីពណ៌នោះក៏គ្រប់គ្រាន់ដែរសម្រាប់ដាក់ពណ៌លើផែនទីណាមួយនោះ គេអាចវិភាគដោយប្រព័ន្ធពហុធាត្រូវគ្នានឹងផែនទីនោះ។ ពណ៌នីមួយៗ ត្រូវបានតាងដោយឯកតានៃឫសគូប ហើយតំបន់នីមួយៗតាងដោយអថេរ x_i ដូច្នេះគេអាចសន្មតថា តម្លៃមួយក្នុងចំណោមតម្លៃទាំងបី ក៏ដូចជា ពណ៌មួយក្នុងចំណោមពណ៌ទាំងបី ។ ដូចនេះយើងបានសមីការ $x_i^3 -1 = 0$ សម្រាប់តំបន់នីមួយៗ។

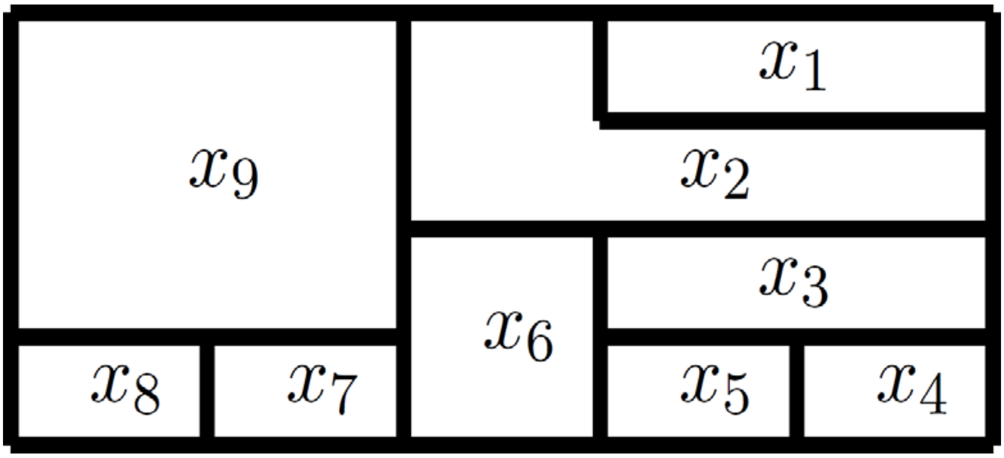
សម្រាប់តំបន់ x_j និង x_k យើងមាន $0 = x_j^3 - x_k^3 = \left(x_j - x_k\right)\left(x_j^2 + x_jx_k + x_k^2\right)$ ។ បើសិន x_j និង x_k នៅមានព្រំដែនជាប់គ្នា ហើយមិនអាចមានពណ៌ដូចគ្នានោះ នាំឱ្យ $x_j \neq x_k$ ដូចនេះ នាំឱ្យ $x_j^2 + x_jx_k + x_k^2 = 0$ ។ ក្នុងវិធីនេះ ផែនទីដែលមាន n តំបន់ហើយអាចផាត់តែបីពណ៌ នោះបើសិននិងទាល់តែ ប្រព័ន្ធសមីការពហុធា៖

$$\left\{\begin{array}{l} x_i^3 - 1 = 0 \ , \\ x_j^2 + x_jx_k + x_k^2 = 0 \ , \end{array}\right. \qquad (1)$$

ដែល $i = 1, \ldots\ldots, n$ ហើយ x_j និង x_k តាងដោយតំបន់ដែលជាប់គ្នា មានចម្លើយយ៉ាងហោចមួយ។

ឧទាហរណ៍ទី១

យើងពិនិត្យផែនទី:



រូបភាព 1

តើវាអាចផាត់ដោយពណ៌តែបីឬទេ?

ដើម្បីឆ្លើយនឹងសំនួរយើងត្រូវតែផ្ទៀងផ្ទាត់ថាប្រព័ន្ធពហុធា (1) ដោយ $i=1,......,9$ ហើយ

$$(j,k)\in\{(1,2);(2,3);(2,6);(2,9);(3,4);(3,5);(3,6);(4,5);(5,6);(6,7);(6,9);(7,8);(7,9);(8,9)\}$$

មានចម្លើយ។

២.ប្រព័ន្ធសមីការពហុធា

ចម្លើយនៃចំណោទជាច្រើននៅក្នុងគណិតវិទ្យា គឺជាចម្លើយនៃប្រព័ន្ធសមីការពហុធា ដែលភាគច្រើនស្មុគស្មាញ។ បើសិនជាប្រព័ន្ធដែលគេឲ្យជាសមីការលីនេអ៊ែរ យើងអាចដោះស្រាយតាមវិធីសម្រួល ហ្គោស៍ (*Gaussian Elimination*) ជំនួសដោយប្រព័ន្ធសមីការដែលសមមូល ដែល ងាយស្រួលដោះស្រាយ។ ក្នុងករណីដែលប្រព័ន្ធពហុធានោះ វាមានវិធីសាស្ត្រប្រៀបធៀប ដោះស្រាយដែលយើងនឹងពណ៌នាខាងក្រោម។

យើងកំណត់សំណុំនៃពហុធាដោយ $P(n)$ ដែលជាសំណុំ ពហុធាមានមេគុណកុំផ្លិច និងមួយអញ្ញាត $x_1,......,x_n$។ គេឲ្យ $f_1,......,f_r$ ជាសំណុំពហុធាក្នុងសំណុំ $P(n)$។ នោះយើងកំណត់អ៊ីដេអាល់មួយពីពួកវាបានដោយ:

$$I=\langle f_1,......,f_r\rangle=\{h_1f_1+......+h_rf_r \mid h_1,......,h_r\in P(n)\}$$

មានទ្រឹស្តីបទមួយរបស់អ្នកគណិតវិទ្យាដេវីត ហ៊ីលប៊ើត (*David Hilbert*) *(2)*ដែលហៅថាទ្រឹស្តីបទ*Hilbert's Nullstellensazx* បានចែងថា ប្រព័ន្ធពហុធានៃ $f_1=......=f_r=0$ អាចមានចម្លើយ(កុំផ្លិច) លុះត្រាតែ $1\notin\langle f_1,......,f_r\rangle$ ប៉ុន្តែតើយើងអាចត្រួតពិនិត្យលក្ខខណ្ឌនេះយ៉ាងដូចម្តេច?

ប្រព័ន្ធសមីការទាំងពីរវាពិតជាងាយស្រួលផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $f_1=......=f_r=0$ និង $g_1=......=g_s=0$ ដែល $f_i, g_j\in P(n)$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ(2) $\langle f_1,......,f_r\rangle=\langle g_1,......,g_s\rangle$ ហើយមានចម្លើយតែមួយដូចគ្នា។

ហេតុដូច្នេះយុទ្ធសាស្រ្តក្នុងការដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $f_1=......=f_r=0$ គឺត្រូវរកពហុធា $g_1,......,g_s$ ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (2) ហើយវាពិតជាអាចតេស្តបានថាតើ $f\in P(n)$ ជារបស់ $\langle f_1,......,f_r\rangle$ ហើយចម្លើយតែមួយដូចគ្នា ហើយងាយដោះស្រាយជាងប្រព័ន្ធសមីការដើម ។

អត្ថិភាពនៃ $G=\{g_1,......,g_s\}$ ត្រូវបានគេឃើញតាមរយៈទ្រឹស្តីបទមួយក្នុងកំឡុងពេលពាក់កណ្តាលជំបូងនៃសតវត្សមុន ដោយអ្នកគណិតវិទ្យា វ៉ុលហ្វ៊ែង គ្រូបណ៌រ (*Wolfgang Gröbner*) រយៈពេលប៉ុន្មានឆ្នាំក្រោយមក សិស្សរបស់គាត់

ប្រុយណូ ប៊ិចប៊ើហ្គើ (Bruno Buchberger) បានបង្កើតវិធីសាស្ត្រដើម្បីគណនាវា។ ការបង្កើតទាំងនេះ ត្រូវបានគេហៅថា មូលដ្ឋានគ្រឹះ*Gröbner*និងទ្រឹស្តីបទអាល់ការីតរបស់ *Buchberger* ដើម្បីគណនា វាជាទ្រឹស្តីបទមួយដ៏សំខាន់ក្នុងការពិជគណិតគណនា។

បើសិនជាអ៊ីដេអាល់មានទម្រង់ $I=\langle f_1\rangle$ យើងមាន $f\in I$ លុះត្រាតែ $f=h_1f_1$ ដែល f ចែកដាច់នឹង f_1។ ដូចគ្នានេះ $f\in\langle f_1,......,f_r\rangle$ លុះត្រាតែ $f=h_1f_1+......+h_rf_r$ តាមលក្ខណៈខាងលើមានរាងជាការបំបែក f ជា $f_1,......,f_r$។ ការពិតយើងអាចបំបែកពហុធាជាអថេរមួយចំនួនមានកំណត់ ដែលពហុធាទាំងនោះមានលំដាប់របស់វា។

៣. មូលដ្ឋានគ្រឹះគ្រូបណ៍រ

ឯកធា m មួយនៃ $P(n)$ ជាធាតុនៃទម្រង់ $x_1^{a_1}$ ...... $x_n^{a_n}$ ដែល $a_1,......,a_n$ ជាចំនួនគត់វិជ្ជមាន។ ឯកធា x_1^{0} ......x_n^{0} បានកំណត់ដោយ 1។ ក្នុងចំណោម លំដាប់ $\preceq$ ឯកធានៃសំណុំ $P(n)$ លំដាប់ដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ $1\le m$ និង $m_1.m\le m_2.m$ កាលណា $m_1\le m_2$ អាចយកទៅអនុវត្តក្នុងអាល់ការីតបំបែក។

ឧទាហរណ៍ជាការរៀបតាមលំដាប់សទ្ទានុក្រម $\preceq_{Lex}$ ដែល $x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}\preceq_{Lex}x_1^{b_1}\ldots x_n^{b_n}$ បើសិនជាមាន $1\le i\le n$ បំពេញលក្ខខណ្ឌ $a_i<b_i$ និង $a_j<b_j$ សម្រាប់គ្រប់ $j<i$។

កំណត់លំដាប់នៃឯកធាទាំងនោះ ឯកធាធំបំផុតនៃពហុធា f ត្រូវបានគេហៅថាកន្សោមគោលនៃ f ហើយតាងដោយ $lt(f)$។

មូលដ្ឋានគ្រឹះគ្រូបណ៍រ ជាអ៊ីដេអាល់ $I=\langle f_1,......,f_r\rangle$ ត្រូវជាមួយនឹងលំដាប់ឯកធាមួយ តាមនិយមន័យ គឺជា គ្រប់សំណុំ $G=\{g_1,......,g_s\}$ ជាធាតុរបស់ I ដែលកន្សោមគោលគ្រប់ធាតុនៃI ចែកដាច់និងកន្សោមគោលនៃធាតុមួយចំនួនរបស់សំណុំ G។ យើងអាចបង្ហាញថាគ្រប់មូលដ្ឋានគ្រូបណ៍រ G នៃ I ជាសំណុំដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (2)។

ដូច្នេះ$1\in I$ លុះត្រាតែមានមូលដ្ឋានគ្រូបណ៍រនៃសំណុំ I មានធាតុមិនសូន្យ នោះ $1\le m$ សម្រាប់គ្រប់ឯកធា m នៃ $P(n)$។

ឧទាហរណ៍ $G=\{f_1\}$ ជាមូលដ្ឋានគ្រូបណ៍រនៃ $\langle f_1\rangle$ ត្រូវជាមួយនឹងគ្រប់លំដាប់ឯកធាទាំងអស់ ចំណែកឯ $G=\{x+y+z-6,x-y+1,x+y-z\}$ គឺមិនមែនជាមូលដ្ឋានគ្រូបណ៍រនៃ $I=\langle x+y+z-6,x-y+1,x+y-z\rangle$ ត្រូវជាមួយនឹងលំដាប់សទ្ទានុក្រមទេ ពីព្រោះ $lt\big(x+y+z-6-(x-y+1)\big)=lt(2y+z-7)=2y$ ចែកមិនដាច់នឹង $x=lt(x+y+z-6)=lt(x-y+1)=lt(x+y-z)$ ទេ។

ដើម្បីទទួលយកគំនិតមូលដ្ឋានគ្រូបណ៍រត្រូវជាមួយនឹងការជ្រើសរើសលំដាប់ឯកធា អ្នកអាចអនុវត្តតាមវិធីសាស្ត្រ ប៊ិចប៊ើហ្គើ (3) ។ យើងអាចរក វិធិសាស្ត្រក្នុងការគណនាមូលដ្ឋានគ្រិះគ្រូបណ៍រក្នុងកុំព្យូទ័រភាគច្រើនខេលមានការគណនាប្រព័ន្ធពិជគណិត។
ចំពោះមុខ មូលដ្ឋានគ្រិះគ្រូបណ៍រនៃអ៊ីដេអាល់ $I=\langle x+y+z-6,x-y+1,x+y-z\rangle$ ដែលត្រូវគ្នាជាមួយនឹងលំដាប់សទ្ទានុក្រមនោះគឺ $G=\{x+y+-6,2y+z-7,2z-6\}$។

៤. ដំណោះស្រាយបញ្ហា និង ការអនុវត្តផ្សេងៗ

ប្រព័ន្ធសមីការដែលមានក្នុងឧទាហរណ៍ ១ មានចម្លើយរាប់បាន (មាន ៩ អញ្ញាត ហើយអញ្ញាតនីមួយៗអាចយកតម្លៃមួយ ក្នុងចំណោមតម្លៃទាំងបី)។បញ្ហានៅត្រង់ថា ប្រព័ន្ធមានចម្លើយឬទេ? បើមានតើអាចកំណត់បានយ៉ាងណា។

អនុវត្តវិធីសាស្ត្រប៊ិចប៊ើហ្គើ លើ ប្រព័ន្ធសមីការ នៃឧទាហរណ៍ ១ យើងទទួលបានមូលដ្ឋានគ្រិះគ្រូបណ៍រ G ត្រូវជាមួយនឹងលំដាប់សទ្ទានុក្រម:

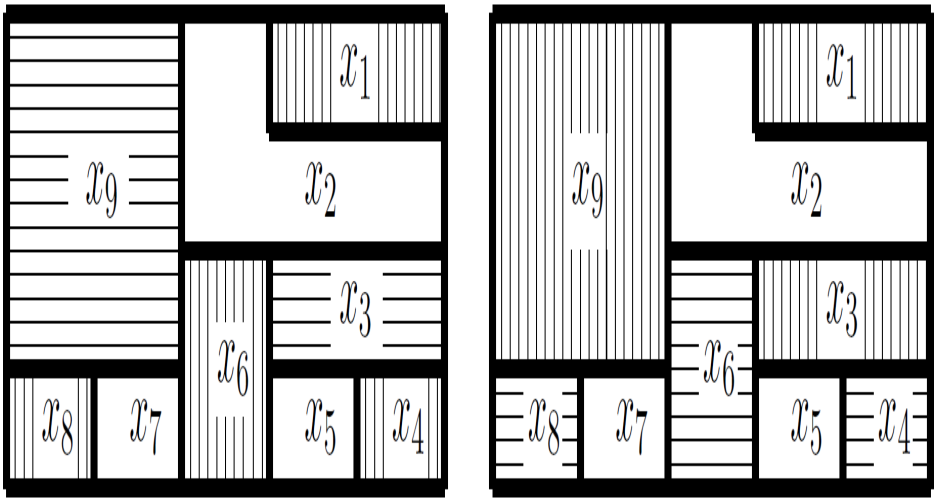
$$G=\{x_1^3-1;\ x_2^2+x_2x_1+x_1^2;\ x_3^2+x_3x_2-x_2x_1-x_1^2;\ x_4+x_3+x_2;x_5-x_2;\ x_6+x_3+x_2;\ x_7-x_2;\ x_8+x_3+x_2;\ x_9-x_3\}$$

ដូច្នេះ $1\notin I$ ហើយតមកទៀត ប្រព័ន្ធនេះមានចម្លើយ។ សមីការ

$$\begin{cases} x_1^{\,3}-1=0 \\ x_2^{\,2}+x_2x_1+x_1^{\,2}=0 \\ x_5-x_2=0 \\ x_7-x_2=0 \\ x_9-x_3=0 \end{cases}$$

បានបកស្រាយដូចតទៅ៖ យើងអាចប្រើគ្រប់ពណ៌សម្រាប់x_1 , $x_2\neq x_1$, $x_2=x_5=x_7$ និង $x_3=x_9$

ដោយពណ៌តំណាងដោយឫសកុំផ្លិចទី៣ ចម្លើយនៃប្រព័ន្ធ $x_4+x_3+x_2=0,\ x_6+x_3+x_2=0$ និង $x_8+x_3+x_2=0$ គឺជាវរកពណ៌ផ្សេងគ្នាx_2 , x_3 និង x_4 ដូច្នេះ $x_4=x_6=x_8$ ។ ជាចុងក្រោយ
$0=x_3^{\,2}+x_3x_2-x_2x_1-x_1^{\,2}=(x_3+x_2+x_1)(x_3-x_1)$ ឲ្យយើងនូវលទ្ធភាពពីរគឺ $x_3+x_2+x_1=0$ ឬ $x_3-x_1=0$ នោះ x_1 , x_2 និង x_3 យកពណ៌ផ្សេងគ្នាឬ$x_1=x_3$ ។ ដូច្នេះយើងរកដោយចំលាស់ពណ៌នោះរាល់ដំណោះស្រាយអាចធ្វើបាន:



រូបភាព 2

មូលដ្ឋានគ្រិះគ្រូនណ័រ ក៏អាចអនុវត្តលើអ៊ីដេអាល់ បម្លែងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទៅជាសមីការអាំព្លីស៊ីត (ឧទាហរណ៍សម្រាប់ក្រឡាផ្ទៃ និងខ្សែកោងមួយចំនួន)បម្លែងសមីការប៉ារ៉ាម៉ែតទៅជាសមីការគ្មានប៉ារ៉ាម៉ែត ប្រើដើម្បីគណនាពហុធាតូចបំផុតនៃចំនួនពិជគណិត ប្រើផ្ទៀងផ្ទាត់ទ្រឹស្តីបទផ្សេងៗនៃធរណីមាត្រអឺគ្លីត ប្រើដើម្បីសង់អូរីហ្គាមី និងដោះស្រាយចំណោទពាក្យខ្វែងសូដូគុ (មើល 4), (5) និង (6))៕

ឯកសារយោង

(1) http://ww.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf

(2) http://www.mat.uniroma1.it/people/manetti/dispense/nullstellen.pdf

(3) http://www.rise.jku.at/buchberg/papers/1970-00-00-Aenglsih.pdf

(4) Adams,W.andLoustaunau, P., An Introduction to Grobner Basis AMS , Providence Rl (1994).

(5) Cox, D; Little,J and O'Shea, D., Ideals,Varieties and Algorithm ,
2nd edition, Springer-Verlag, New York, (1996)

(6) Hermandes ,H,E.,UmPrimeiroContato com Bases de Grobner,
28^0. ColoquiBrasileiro deMatematica , IMPA ,Rio de Janeiro ,
(2011).