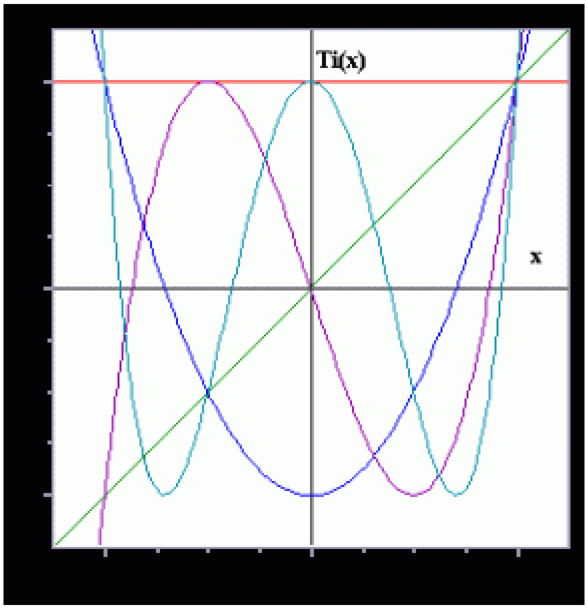
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

ម៉ាស៊ីនគតលេខ ស៊េរីស្វ័យគុណ និងពហុធាឆេប៊ីស្វេ (Chebyshev)

អ្នកនិពន្ធ Graeme Cohen



រាល់អនុគមន៍ដែលយើងធ្លាប់បានស្គាល់ហើយដូចជា អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ, អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល និងអនុគមន៍លោការីត សុទ្ធតែអាចគណនាប្រហែលទៅនឹងអនុគមន៍ពហុធាបាន។ វត្ថុបំណងនៃអត្ថបទនេះគឺ ដំបូងណែនាំឲ្យស្គាល់ស៊េរីស្វ័យគុណ ដែលចាត់ទុកដូចជាអនុគមន៍ពហុធាមានដឺក្រេមិនកំណត់ ហើយទីពីរគឺ បង្ហាញការអនុវត្តន៍របស់វា ក្នុងការគណនាតម្លៃប្រហែលនៃអនុគមន៍មួយដោយម៉ាស៊ីនគិតលេខ។ ពេលម៉ាស៊ីនគិតលេខផ្តល់លទ្ធផលនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ ឬ អនុគមន៍អ៊ិចស្ប៉ូណង់ស្យែល ឬ អនុគមន៍លោការីត វិធីសាស្រ្តដ៏ល្អមួយនោះគឺ ការគណនាតម្លៃប្រហែលអនុគមន៍ទាំងនោះទៅនឹងអនុគមន៍ពហុធា ដោយកាត់ចោលស៊េរីស្វ័យគុណ ហើយទទួលបានតម្លៃប៉ាន់ស្មានដ៏ល្អមួយ។ ប៉ុន្តែនៅមានវិធីប្រសើរជាង។ ដោយឡែកយើងនឹងធ្វើការបញ្ចុះស៊េរីស្វ័យគុណនៃអនុគមន៍ $\sin x$ ហើយយើងនឹងសង្កេតពីការធ្វើឲ្យប្រសើរក្នុងការប៉ាន់ស្មាន់តម្លៃរបស់វា។ ការណ៏នេះទាក់ទងនឹង ពហុធាឆេប៊ីស្វ ដែលវាត្រូវបានគេប្រើក្នុងគោលបំណងប្រហែលគ្នានេះ លើការអនុវត្តន៍ជាច្រើនផ្សេងទៀត។ (សម្រាប់អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ អាល់ការីត ត័កឌីក ត្រូវបានគេយកមកប្រើច្រើន នេះប្រហែលជាប្រធានបទមួយផ្សេងទៀត)។ ហ្វេលីក ក្លេន សង្ឃឹមថានឹងមានការបកស្រាយតាមធរណីមាត្រ។ លើសពីនោះវាត្រូវការតែចំណេះដឹងត្រីកោណមាត្រ និងវិធីសាស្រ្តគណនាតែប៉ុណ្ណោះ។

ដំណោះស្រាយដោយប្រើស៊េរីធរណីមាត្រ

ស៊េរីធរណីមាត្រ $1+x+x^2+x^3+\cdots$ គឺជាស៊េរីស្វ័យគុណដ៏ធម្មតាបំផុត។ អត្ថិភាពផលបូកនៃស៊េរីនៅពេលដែល$|x|<1$។ យើងបាន

$$1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x},\quad \text{ពេល}\quad |x|<1. \qquad (1)$$

រាងទូទៅនៃស៊េរីស្វ័យគុណគឺ $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ ។

ដូច្នេះ យើងឃើញថាស៊េរីធរណីមាត្រខាងលើ គឺជាស៊េរីស្វ័យគុណ ដែលមានមេគុណ$a_0=a_1=a_2=\cdots=1$ ។ ក្នុងករណីនេះ ស៊េរីរួមទៅរក $\frac{1}{1-x}$ ពេល $|x|\prec 1$ ។ យើងនិយាយថាអនុគមន៍ f ដែល $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $|x|<1$,មានស៊េរីពន្លាត (អាចបំបែកជាស៊េរី) $1+x+x^2+x^3+\cdots$ ឬនិយាយថា f តាងដោយស៊េរីនេះ។

យើងចាប់អារម្មណ៍ជាដំបូងចំពោះការបង្ហាញអនុគមន៍ផ្សេងៗទៀត ដែលអាចតាងជាស៊េរីស្វ័យគុណបានដែរ។ អនុគមន៍ជាច្រើនអាចទាញជាវិបាកពី(1) ។ ជាឧទាហរណ៍យើងជំនួស x ដោយ $-x^2$ យើងបានស៊េរីតាងឱ្យ $1/(1+x^2)$

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\frac{1}{1+x^2}, |x|<1 \qquad (2)$$

យើងអាចដេរីវេទាំងអង្គសងខាងនៃសមីការ (1) ដើម្បីទទួលបានស៊េរីតាងឱ្យ $1/(1-x)^2$

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots=\frac{1}{(1-x)^2}, |x|<1$$

យើងក៏អាចធ្វើ អាំងតេក្រាលអង្គសងខាងនៃសមីការ (1) បានដែរ ហើយគុណនឹង -1 (ដើម្បីឱ្យងាយ) ហើយគ្រាន់តែប្ដូរពី x ទៅ t ដែលអញ្ញាត t មានអាំងតេក្រាលពី 0 ដល់ x ដែល $|x|<1$ យើងបាន

$$-\int_0^x (1+t+t^2+t^3+\cdots)\,dt=-\int_0^x \frac{dt}{1-t},$$

ដូច្នេះ

$$-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots=-\log(1-x), \quad |x|<1$$

យើងទទួលបានស៊េរីតាងឱ្យអនុគមន៍ $\log(1-x)$ ពេល $|x|<1$។ ដូចគ្នានេះដែរតាម (2) យើងអាចធ្វើអាំងតេក្រាលអង្គសងខាងនៃសមីការ យើងបាន

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\tan^{-1}x, \quad |x|<1 \quad (3)$$

យើងឃើញថាអ្វីដែលបានស្រាយបញ្ជាក់កន្លងមក (ហើយនឹងបន្តធ្វើ) ទាមទារតែការផ្ទៀងផ្ទាត់ ដែលជាលំហាត់ប៉ុណ្ណោះ។

ស៊េរីស្វ័យគុណសំរាប់អនុគមន៍ស៊ីនុស

តទៅទៀត យើងនិងបង្ហាញរបៀបនៃការតាងអនុគមន៍ $\sin x$ ទៅជាស៊េរីស្វ័យគុណ។ ជាទូទៅ យើងអាចសរសេរ

$$\sin x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots. \qquad (4)$$

យក $x=0 \Rightarrow a_o=0$ ។ យើងធ្វើដេរីវេនៃសមីការ (4) យើងបាន

$$\cos x=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots.$$

ចំពោះ $x=0 \Rightarrow a_1=1$

យើងបន្តធ្វើដេរីវេរហូត ហើយ យក x = 0 នោះយើងបាន

$$-\sin x=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+\cdots, \text{ នោះ } a_2=0,$$

$$-\cos x=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+5\cdot 4\cdot 3a_5x^2+6\cdot 5\cdot 4a_6x^3+\cdots, \text{ នោះ } a_3=\frac{-1}{3\cdot 2}$$

$$\sin x=4\cdot 3\cdot 2a_4+5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5x+6\cdot 5\cdot 4\cdot 3a_6x^2+\cdots, \text{ នោះ } a_4=0,$$

$$\cos x=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5+6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_6x+7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3a_7x^2+\cdots, \text{ នោះ } a_5=\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{5!}$$

តាមវិធីសាស្ត្រនេះយើងអាចរកបានរូបមន្តទូទៅនៃរាល់មេគុណ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ គឺ

$a_{2n} = 0, \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!},$

សម្រាប់ $n = 0, 1, 2, \cdots$(មេគុណតួសេស និងតួគូមានរាងផ្សេងគ្នា)។ យើងបាន

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

នេះគឺជាស៊េរីស្វ័យគុណរាងចុងក្រោយ។ វិធីសាស្រ្តយើងធ្វើនេះសម្រាប់តាងSin x ពេល x នៅជិតៗ សូន្យ (មានន័យថា |x| < 1 ដូចដែលបានបង្ហាញរួចមកហើយ)។ ដូចនេះតើយើងអាចបង្ហាញបានទេថា ស៊េរីខាងលើអាចតាងចំពោះគ្រប់x ។ ការធ្វើផលបូកដោយផ្នែកនៃស៊េរី គឺការបូកផ្នែកដែលមានចំនួនតួកំណត់នៃស៊េរី អាចតាង ជាអនុគមន៍ពហុធា អាចប្រើដើម្បីរកតម្លៃប្រហែលរបស់អនុគមន៍ស៊ីនុស ដូចអ្នកដែលប្រើតារាងត្រីកោណមាត្រ ក៏ដូចជាការប្រើម៉ាស៊ីនគិតលេខ។

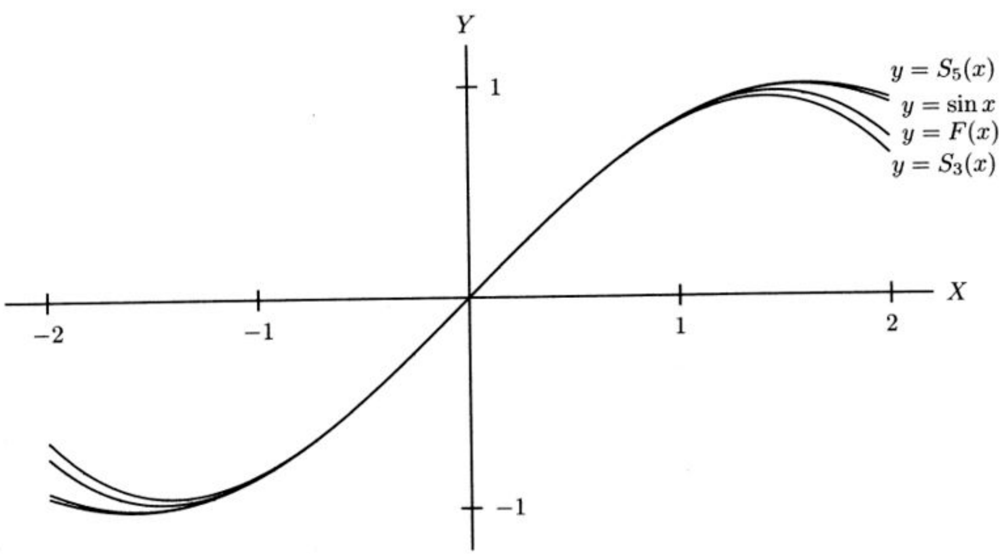
ការរកតម្លៃប្រហែលដោយប្រើ ពហុធា Chebyshev

ជាឧទាហរណ៍ តាង

$$S_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} \quad \text{និង} \quad S_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

ពហុធាដឺក្រេទី៣ $S_3(x)$ និងពហុធាដឺក្រេទី៥ $S_5(x)$ ដែលប្រហែលទៅនឹង Sin x , ពេល $-2 \leq x \leq 2$។ យើងឃើញថា វាល្អសំរាប់ការរកតម្លៃប្រហែល ចំពោះ $-1 \leq x \leq 1$ប៉ុន្តែវាមិនមានភាពល្អប្រសើរទេ ពេលខិតទៅរក $x = \pm 2$ ។ ពហុធាដឺក្រេទី៥ $S_5(x)$ គឺប្រសើរជាង$S_3(x)$ សំរាប់ការរកតំលៃប្រហែលនៅចន្លោះនេះ ដូចដែលយើងបានឃើញស្រាប់។ ប៉ុន្តែតើយើងអាចរកអ្វីប្រសើរជាង $S_3(x)$ ដោយប្រើអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី៣ ផ្សេងទៀតបានឬទេ?

ជាឧទាហរណ៍ ពេល x = 1 នោះលំអៀងក្នុងការប្រើពហុធាដឺក្រេទី៣ គឺ$\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right) \approx 0.0081$ ។ យើងនិងបង្កើតអនុគមន៍ពហុធាដឺក្រេទី៣ F ដែលមានតម្លៃល្អៀងតិចជាង 0.001 ចំពោះ |x| < 1 ។ ខ្សែកោង $y = F(x)$ បង្ហាញក្នុងក្រាបខាងក្រោម ចំពោះ|x|<2 ហើយវាច្បាស់ណាស់ថា ខ្សែកោងនោះកៀកនឹង$y = \sin x$ ជាង $S_3(x)$ សូម្បីតែនៅក្បែរ $x = \pm 2$ ។



យើងនិងប្រើពហុធាឆេប៊ីស្វេ ដើម្បីរក F ។ វិធីទាំងនេះត្រូវប្រើយ៉ាងទូលំទូលាយសម្រាប់ រកតម្លៃប្រហែល ដូចដែលយើងកំពុងធ្វើទីនេះ។ យើងសង់ T_k ជាអនុគមន៍តាងដោយ $T_k(x) = \cos k\theta$ ដែល $x = \cos\theta, \quad k \geq 0$ (ឬយើងអាចសរសេរ $T_k(x) = \cos(k\cos^{-1} x)$ ។ តាមលក្ខណៈនៃ កូស៊ីនុស តម្លៃរបស់វានៅក្នុង[-1 , 1] នោះរូបភាពរបស់វាក៏នៅក្នុង[-1 , 1] ដែរ។ ឱ្យតម្លៃ $k = 0 \Rightarrow T_0(x) = 1$ និង ចំពោះ $k = 1 \Rightarrow T_1(0) = x$

ប៉ុន្តែយើងមិនទាន់ច្បាស់ភ្លាមៗទេថា $T_k(x)$ គឺពិតជាពហុធាដែលចង់រកនោះទេសំរាប់ $k \geq 2$។ ដើម្បីស្រាយករណីនេះ គួររំលឹកថា

$$\cos(k+1)\theta = \cos(k\theta + \theta) = \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta,$$
$$\cos(k-1)\theta = \cos(k\theta - \theta) = \cos k\theta \cos\theta + \sin k\theta \sin\theta,$$

បូកសមីការទាំងពីរខាងលើយើងបាន

$$\cos(k+1)\theta = 2\cos\theta \cos k\theta - \cos(k-1)\theta.$$

ដូច្នោះ

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1.$$

ឥឡូវយើងឲ្យ k = 1, 2, 3, . . . នោះយើងបាន

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \qquad (5)$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$
$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \qquad (6)$$

ហើយតទៅទៀត។ ច្បាស់ណាស់ថា វាជាពហុធារៀងរាល់លើក។ ដោយសារវាជាពហុធា យើងមិនចាំបាច់គិតពីដែនកំណត់ $x \in [-1,1]$ របស់វាទេ។

ឥឡូវយើងត្រឡប់ទៅរកបញ្ហាពីការរកតម្លៃប្រហែលនៃ $\sin x$ ដែល |x| < 1 ជាមួយនិងលំអៀងតិចជាង 0.001 ។ ដំបូងយើងកត់សំគាល់ថាលំអៀងនៃ ពហុធាដឺក្រេទី៥ $S_5(x)$ គឺ

$$|\sin 1 - S_5(1)| = \left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120}\right)\right| < 0.0002, \qquad (7)$$

ហើយទ្រឹស្តីបទនៃចម្លាស់ស៊េរីមិនកំណត់ បង្ហាញថា $|\sin x - S_5(x)| < 0.0002$ ក្នុងចន្លោះរបស់យើងដូចបង្ហាញក្នុងរូប។ បន្ទាប់មកទៀត យើងនឹងសរសេរ $S_5(x)$ ជារាងពហុធាឆេប៊ីស្វេ។ ប្រើសមីការ(5)និង (6) យើងមាន

$$x = T_1(x)$$
$$x^3 = \frac{1}{4}\left(T_3(x) + 3x\right) = \frac{1}{4}\left(T_3(x) + 3T_1(x)\right)$$
$$x^5 = \frac{1}{16}(T_5(x) + 20x^3 - 5x) = \frac{1}{16}(T_5(x) + 5T_3(x) + 10T_1(x)),$$

នោះ $S_5(x) = T_1(x) - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}(3T_1(x) + T_3(x)) + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{16}(10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x))$

$$= \frac{169}{192}T_1(x) - \frac{5}{128}T_3(x) + \frac{1}{1920}T_5(x)$$

ដោយ $|T_5(x)| \le 1$ ពេល $|x| < 1$, ចោលតួ $\frac{1}{1920}T_5(x)$ ដែលមានល្អៀងយ៉ាងច្រើន $\frac{1}{1920} < 0.0006$ ប្រើសមីការ(7) មានលំអៀងសរុបតិចជាង 0.0008 វានៅតែតិចជាង 0.001 ឥឡូវយើងបាន

$$\frac{169}{192}T_1(x) - \frac{5}{128}T_3(x) = \frac{169}{192}x - \frac{5}{128}(4x^3 - 3x) = \frac{383}{384}x - \frac{5}{32}x^3,$$

ហើយអនុគមន៍ដឺក្រេទី៣នេះ យើងហៅថា អនុគមន៍ F ។

យើងបានបង្ហាញ យោងតាមរូបភាពផងដែរថាអនុគមន៍ F ដែល $F(x) = \frac{383}{384}x - \frac{5}{32}x^3$ មានតម្លៃប្រហែលជិតតម្លៃនៃ $\sin x$ ចំពោះ $|x| \le 2$ ជាងតម្លៃប្រហែលនៃអនុគមន៍ដឺក្រេទីបី $x - \frac{1}{6}x^3$ ដែលបានមកពីស៊េរីស្វ័យគុណនៃ $\sin x$ ។

សន្និដ្ឋានៈ ចំណុចជាប្រវត្ត

ពហុធាឆេប៊ីសេវមានប្រសិទ្ធិភាពសម្រាប់គោលបំណងរបស់យើង ជាលក្ខណសម្បត្តិនៃអនុគមន៍ កូស៊ីនុស។ ចំពោះគ្រប់ k > 0 និង |x| < 1 នោះយើងបាន $|T_k(x)| \le 1$ ។ ប៉ាហ្វនូទី ល្វូវីច ឆេប៊ីស្សេវ (Pafnuty Lvovich Chebyshev) ដែលនាមត្រកូលគាត់ជូនកាលគេហៅ Tchebycheff ជាជនជាតិរុស្សី បានបង្ហា បង្ហាញនូវពហុធានេះឡើងនៅក្នុងឆ្នាំ ១៨៥៤ ។ បានជាគេតាងពហុធានេះដោយ $T_k(x)$ ពីព្រោះ Tchebycheff ដែលជាឈ្មោះរបស់គាត់។
ទម្រង់នៃការបង្ហាញខាងលើគឺត្រូវបានគេស្គាល់ថាជាការសំចៃនៃស៊េរីស្វ័យគុណ ហើយវាគឺជាផ្នែកមួយនៃគណិតវិទ្យា ដែលត្រូវគេស្គាល់ថា វិភាគលេខ។ ការសំចៃនេះ មិនមានភាពចាំបាច់រហូតទេ។ ដោយហេតុថាSin x គឺមានតម្លៃប្រហែលនិង x ពេល |x| កាន់តែតូច សូមអានលម្អិតក្នុង Chuck Allison «ម៉ាស៊ីនគណនាអនុគមន៍ស៊ីនុស» ។ យើងបានពោលរួចមកពីខាងដើមថា អាល់ការីត គ័កឌីក ជាញឹកញាប់នៅតែប្រសើរជាង
ប៉ុន្តែសម្រាប់ការគណនាតម្លៃប្រហែលលើម៉ាស៊ីនគិតលេខ ជាពិសេសករណី $\tan^{-1} x$ ដែលស៊េរីស្វ័យគុណរួមយឺត ដូចបានឃើញក្នុង (3) ការសំចៃនេះមានប្រសិទ្ធភាពណាស់។ ប្រហែលជាចំណុចជាប្រវត្តិនេះហើយ ដែលភាពជាក់ស្តែងទាមទារនូវការបង្កើតថ្មីនេះឡើង។

ប្រែសម្រួលដោយ

១ ឡាំង លាងហេង	Tel: 012 962 737	e-mail: laingleangheng@gmail.com
២ រឿន សារ៉ុន	Tel: 016 674 437	e-mail: roeunsaron@gmail.com
៣ សៅ សាឡន	Tel: 097 975 9899	e-mail: saosalorn@gmail.com
៤. សុខ ពិសិដ្ឋ	Tel: 016 510 532	e-mail: pisethsok87@gmail.com