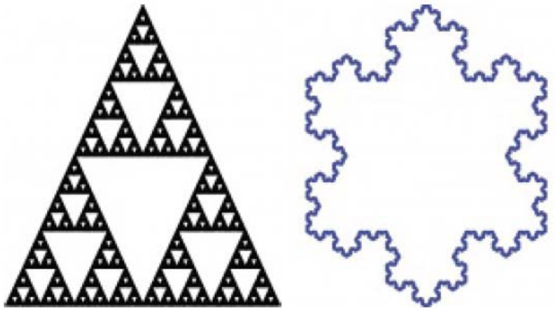
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

វិមាត្រ

អ្នកនិពន្ធ: គ្រីស្ទាន រ៉ូស្សូ (Christiane Rousseau)



តើយើងវាស់ទំហំធរណីមាត្រនៃវត្ថុដោយវិធីណា? សម្រាប់ផ្នែកមួយនៃប្លង់ ជារឿយៗយើងប្រើ បរិមាត្រ ប្រវែង ផ្ទៃក្រឡា អង្កត់ផ្ចិត។ល។ ទាំងនេះមិនគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីកំណត់ភាគ ល្អិតដទៃទេ។ ភាគល្អិតដទៃ ជាទម្រង់ធរណីមាត្រស្មុគស្មាញ ហើយទាមទារឱ្យយើងរកវិធីកំណត់ភាពស្មុគស្មាញទាំងនោះ។ សម្រាប់គោលបំណងនេះ អ្នកគណិតវិទ្យាបានធ្វើការបង្ហាញគំនិត ស្តីពីវិមាត្រ។ គំនិតស្តីពីវិមាត្រ គឺជាការធ្វើឱ្យមានលក្ខណៈទូទៅ ឬមានលក្ខណៈផ្លូវការ នៃសញ្ញាណបែបអព្ភន្តរញាណ ស្តីពីវិមាត្រ នៅពេលដែលយើងនិយាយ អំពីវិមាត្រមួយ(1D) វិមាត្រ២(2D) ឬ វិមាត្រ៣ (3D)។ យើងនឹងពិភាក្សាពីវិធីខ្លះៗ ដើម្បីពណ៌នាពីភាគល្អិត ដោយសិក្សាលើឧទាហរណ៍ពីរគឺ ព្រំស៊ែពីនស្គី (Sierpinski carpet) និងបំណែកវ៉ុនខុច (Von Koch flake) (មើលរូបផ្នែកខាងឆ្វេង)។

តើផ្ទៃក្រឡារបស់ព្រំស៊ែពីនស្គីប៉ុន្មាន?

ជាដំបូងយើងត្រូវស្វែងយល់ពីសំណង់នៃព្រំស៊ែពីនស្គី (មើលរូបទីពីរ)។ វាត្រូវបានធ្វើដោយឆ្លងកាត់ ជំហានបន្តបន្ទាប់។ យើងផ្តើម ដោយត្រីកោណមួយនៅជំហាននីមួយៗ យើង កាត់ចេញនូវត្រីកោណកណ្តាលមួយ។ យើង នៅសល់ត្រីកោណបី។ ត្រីកោណដែលនៅសល់នីមួយៗ ក៏យើងកាត់ចេញនូវត្រីកោណកណ្តាល តៗទៅទៀត។ល។

(a) ត្រីកោណដើម(b)ដំណាក់កាលទី១(c)ដំណាក់កាលទី២

រូបភាពទី២ ជំហានបន្តបន្ទាប់នៃការសង់នូវត្រីកោណរបស់ព្រំស៊ែពីនស្គី

ឥឡូវយើងមានធាតុផ្សំទាំងអស់ដើម្បីគណនាផ្ទៃក្រឡានៃព្រំស៊ែពីនស្គី។ យើងសន្មតថាផ្ទៃក្រឡាត្រីកោណដើម គឺ A (មើលរូបទីពីរ(a)) ។

- ដំណាក់កាលទី១៖ យើងយកផ្ទៃនៃ$\frac{A}{4}$ ចេញហើយយើងនៅសល់ផ្ទៃនៃ$A_1 = \frac{3}{4}A$។
- ដំណាក់កាលទី២៖ យើងយក$\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃត្រីកោណ៣ ដែលនៅសល់ នោះវាគឺ$\frac{1}{4}A_1$។

ដូច្នេះយើងបានផ្ទៃក្រឡាដែលនៅសល់គឺ$A_2 = \frac{3}{4}A_1 = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}A = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A$។

- ដំណាក់កាលទី៣៖ យើងយក$\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃត្រីកោណ៩ ដែលនៅសល់ នោះវាគឺ$\frac{1}{4}A_2$។

ដូច្នេះយើងបានផ្ទៃក្រឡាដែលនៅសល់គឺ $A_3=\frac{3}{4}A_2=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}A_1=\left(\frac{3}{4}\right)^3 A$។

- ...
- ដំណាក់កាលទីn៖យើងយក $\frac{1}{4}$ នៃផ្ទៃត្រីកោណ 3^{n-1} ដែលនៅសល់ នោះវាគឺ $\frac{1}{4}A_{n-1}$។

ដូច្នេះយើងបានផ្ទៃក្រឡាដែលនៅសល់គឺ $A_3=\frac{3}{4}A_{n-1}=\left(\frac{3}{4}\right)^n A$។

- ...

ដោយ $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$ យើងបានផ្ទៃក្រឡានៃព្រំស៊ែរពីនស្គីស្មើនឹងសូន្យ!

តើបរិមាត្រនៃបំណែកខ៊ុនខុចប៉ុន្មាន?

រំលឹកឡើងវិញថាបំណែកខ៊ុនខុចទទួលបានដោយសារការធ្វើដដែលៗ។ នៅជំហាននីមួយៗនៃការធ្វើដដែលៗនោះ យើងជំនួសអង្កត់នីមួយៗ ដោយអង្កត់បួនដែលមានប្រវែង $\frac{1}{3}$ នៃកំណាត់ដើម (មើលរូបទីបី)។ ប្រសិនបើ L ជាបរិមាត្រត្រីកោណដើមក្នុងរូបទី៣ (a)។ នៅពេលនោះ $\frac{4}{3}L$ គឺជាបរិមាត្រនៃរូបទី៣ (b) ហើយ $\left(\frac{4}{3}\right)^2 L$ គឺជាបរិមាត្រនៃរូបទី៣ (c) ។ល។ ករណីពិសេស នេះ គឺមានន័យថានៅជំហាននីមួយៗ ប្រវែងត្រូវបានគុណនឹង $\frac{4}{3}$។ ដោយ មានចំនួនមិនកំណត់នៃជំហាន សំណង់បែបនេះ បរិមាត្រនៃបំណែកខ៊ុនខុចស្មើអនន្ត!។

(a) ត្រីកោណដើម (b)ដំណាក់កាលទី១ (c)ដំណាក់កាលទី២

រូបភាពទី៣ បំណែកខ៊ុនខុចនិងដំណាក់កាលបន្តបន្ទាប់ក្នុងការសង់

ខមាត្រភាគល្អិតនៃវត្ថុមួយ

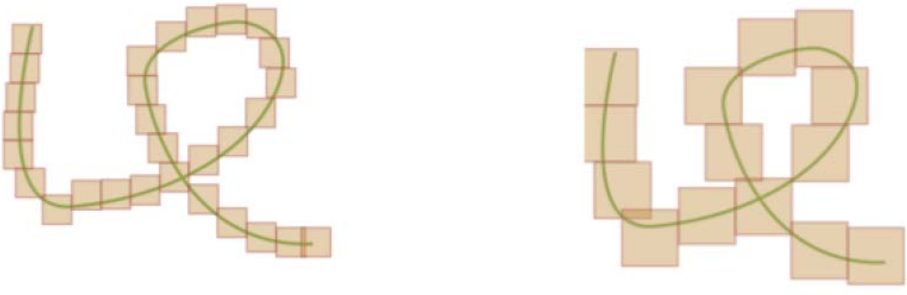
ព្រំស៊ែរពីនស្គីគឺជាវត្ថុពិបាកហើយស្មុគស្មាញ។ យ៉ាងណាក៏ដោយ ផ្ទៃរបស់វាគឺសូន្យ ដូច្នេះហើយវាផ្តល់ឱ្យយើងនូវព័តមានតិចតួចណាស់ពីវា។ ជាការពិត បរិមាត្រនៃបំណែកខ៊ុនខុច ដែលស្មើអនន្ត ក៏ ប្រាប់យើងថា វត្ថុ នោះស្មុគស្មាញ ហើយគ្មានភាពជាក់លាក់ទេ។ ដើម្បីអាចមានព័តមានពីភាគល្អិត អ្នកគណិតវិទ្យាបានណែនាំ គោលការណ៍វិមាត្រ។ តើអ្នកគណិតវិទ្យាឱ្យនិយមន័យវិមាត្របែបណា?

យើងចាប់ផ្តើមជាមួយគំនិត ដែលប្រកបដោយអព្ភន្តរញាណស្តីពីវិមាត្រ។ តាមអព្ភន្តរញាណ ខ្សែកោងរលោង (គ្មានបត់បែន គ្មានរលក) មាន វិមាត្រមួយ ផ្ទៃរលោង មានវិមាត្រពីរ ហើយមាឌពេញមានវិមាត្របី។ ដូច្នេះ យើងអាច

ឱ្យនិយមន័យតាមគណិតវិទ្យានៃវិមាត្រដែលបង្កើតបាន ១ សម្រាប់ខ្សែកោងគ្មានបត់បែន ២ សម្រាប់ផ្ទៃរលោង ហើយនិង ៣ សម្រាប់មាឌពេញ។ នៅក្នុងបរិបទនៃ អត្ថបទខ្លីនេះ យើងនឹងកំណត់ ការសិក្សាត្រឹម វិមាត្រ ១ និង ២។ យើងចង់គ្របរាងធរណីមាត្រមួយនៅក្នុងប្លង់ជាមួយនិងការ៉េតូចៗ។ (ប្រសិនបើយើងចង់ កំណត់ក្នុងវិមាត្រ៣ យើង នឹងប្រើគូប ប៉ុន្តែយើងនឹងប្រើគូបតូចៗ សម្រាប់ខ្សែកោង និងផ្ទៃដោយគ្មានការផ្លាស់ប្តូរនៃវិមាត្រ!)

ករណីខ្សែកោងរលោង (**មើលរូបទីបួន**)

- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េថ្មីមានទំហំពាក់កណ្តាល នោះយើងត្រូវការចំនួនការ៉េប្រហែលជាពីរដងច្រើនជាងមុន ដើម្បីយកមកគ្របលើខ្សែកោងដដែល។
- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េថ្មីមានទំហំមួយភាគបី នោះយើងត្រូវការចំនួនការ៉េប្រហែលជាបីដងច្រើនជាងមុន ដើម្បីយកមកគ្របលើខ្សែកោង។
- ...
- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េថ្មី ទំហំ n ដងតូចជាងការ៉េដើម នោះយើងត្រូវការចំនួនការ៉េប្រហែលជា n ដងច្រើនជាងមុន ដើម្បីយកមកគ្របលើខ្សែកោង។

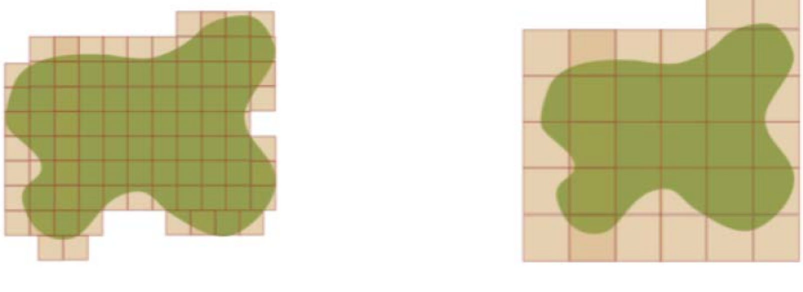


(a) (b)

រូបភាពទី៤ ការគណនាវិមាត្រ នៃខ្សែកោង ដោយប្រើការ៉េដែលមានទំហំខុសៗគ្នា

ករណីផ្ទៃក្រឡា (**មើលរូបទី**5)

- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េថ្មី ទំហំពាក់កណ្តាលការ៉េដើម នោះយើងត្រូវការចំនួនការ៉េប្រហែលជាបួនដងច្រើនជាងមុន ដើម្បីយកមកគ្របលើវត្ថុនោះ។
- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េថ្មី ទំហំមួយភាគបីការ៉េដើម នោះយើងត្រូវការចំនួនការ៉េប្រហែលជា៩ដងច្រើន ជាងមុន ដើម្បីយកមកគ្របលើវត្ថុនោះ។
- ...
- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េថ្មី ទំហំ n ដងតូចជាងការ៉េដើម នោះយើងត្រូវការចំនួនការ៉េប្រហែលជាn^2 ដងច្រើនជាងមុន ដើម្បីយកមកគ្របលើវត្ថុនោះ។



(a) (b)

រូបភាពទី៥ ការគណនាវិមាត្រ នៃផ្ទៃក្រឡា ដោយប្រើការ៉េដែលមានទំហំខុសៗគ្នា

ឥឡូវយើង បាននិយមន័យនៃវិមាត្រ (បែបអព្ភន្តរញាណ)៖

និយមន័យ: វត្ថុមួយនៅក្នុងប្លង់ដែលមានវិមាត្រ d នៅពេលដែលយើងយកការ៉េមានទ្រនុងតូចជាង n ដងមក គ្របវា នោះយើងត្រូវការការ៉េចំនួនប្រហែល n^d ដងដើម្បីគ្របលើវត្ថុ។

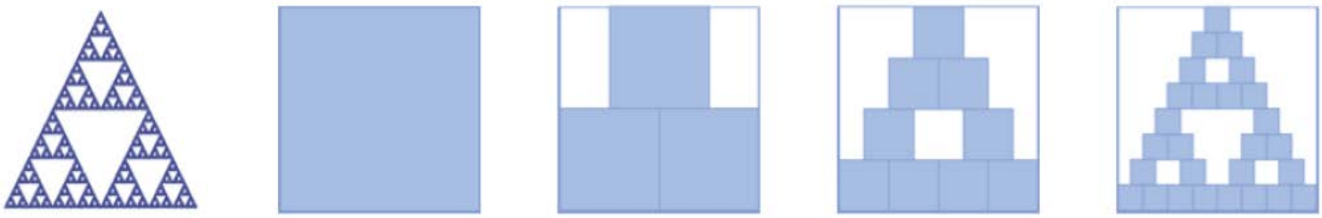
ការកត់សំគាល់ខ្លះៗលើនិយមន័យរបស់យើង ៖

១. ជាការពិតការ៉េប្រើប្រាស់សម្រាប់គ្របលើវត្ថុអាចផ្លៀង។ វាអាចគងលើគ្នាផងដែរ ។

២. ជំនួសឱ្យការ៉េ យើងអាចប្រើចតុកោណកែងទំហំដូចគ្នាតាមផលធៀប $r > 1$ នៃប្រវែងទទឹង។ យើងនឹងទទួលបានលទ្ធផលដូចគ្នាសម្រាប់ វិមាត្រ១ និងវិមាត្រ២ ហើយក៏ជាករណីទូទៅសម្រាប់វិមាត្រ ២ ផងដែរ។ ដើម្បីគណនា វិមាត្រនៃបំណែករ៉ុនខុច គួរប្រើចតុកោណកែងជាប្រើការ៉េ។

និយមន័យអាចទាញជាទូទៅសម្រាប់ធរណីមាត្រនៃវត្ថុ ដែលជាសំណុំរងនៃ $\square^{m}$ ហើយលទ្ធផល មិនអាស្រ័យនឹងចំនួន m ដែលយើងតាងនោះទេ។

និយមន័យ: សំណុំរងនៃ$\square^{m}$ ដែលមានវិមាត្រ d ប្រសិនបើយើងយកអ៊ីពែរគូប m-វិមាត្រ ដែលមាន ដែលមានទ្រនុង n ដងតូចជាងទៅគ្របវា នោះយើងត្រូវការអ៊ីពែរគូប ចំនួនប្រហែល n^d ដើម្បីគ្របវា។



(a) ត្រីកោណស៊ែពីនស្គី (b) 1 (c) 3 (d) 9 (e) 27

រូបភាពទី៦ ចំនួនការ៉េសម្រាប់គ្របលើត្រីកោណស៊ែពីនស្គីនៅក្នុងរូប(a)

មិនមែនគ្រប់វត្ថុសុទ្ធតែមានវិមាត្រនោះទេ។ ប៉ុន្តែវត្ថុដែលប្រហែលគ្នា មានវិមាត្រ ដែលជារឿយៗ មិនមែនជាចំនួនគត់ទេ។ ចូរយើងគណនាវិមាត្រនៃស៊ែពីនស្គី (មើលរូបភាពទី៦)។

- ចូរយកផ្ទៃកការ៉េដែលមានជ្រុងស្មើនឹងប្រវែងនៃបាតត្រីកោណ។ តើវាគ្របលើរូបនៃព្រំស៊ែពីនស្គីឬទេ? រូប(a)
- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េដែលមានជ្រុងស្មើនឹងពាក់កណ្តាលនៃការ៉េមុន នោះយើងត្រូវការការ៉េ៣ដើម្បីគ្របវា។

គួរកត់សម្គាល់ថា$3 = 2^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (រូប(c))

- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េដែលមានជ្រុងស្មើនឹងមួយភាគបួននៃការ៉េមុន នោះ យើងត្រូវការការ៉េ៩ដើម្បីគ្របវា។គួរកត់សម្គាល់ថា$9 = 4^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (រូប(d))
- ប្រសិនបើយើងយកការ៉េដែលមានជ្រុងស្មើនឹងមួយភាគប្រាំបីនៃការ៉េមុន នោះយើងត្រូវការការ៉េ ២៧ ដើម្បីគ្របវា។ គួរកត់សម្គាល់ថា $27 = 8^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (រូប(e))

ដូច្នេះ វាជាការងាយស្រួល ដើម្បីសន្និដ្ឋានថា វិមាត្រនៃត្រីកោណស៊ែពីនស្គីនៃរូប (a) គឺ $d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \sim 1.585$ ។

ឥឡូវនេះយើងពោលអះអាងថា វិមាត្រនៃបំណែករ៉ុនខុចនៃរូប (b) គឺ $\frac{\ln 4}{\ln 3} \sim 1.26$ ។ ហេតុអ្វី ? ប្រសិនបើយើងព្យាយាមគ្របវាដោយការ៉េ ដែលមានជ្រុងប្រវែងផ្នែកមួយនៃរូប។ ភាពលំបាកមួយដែលកើតឡើង គឺការ៉េខ្លះវាគ្របផ្នែកមួយខ្លះទៀតគ្របលើពីរផ្នែក នៅ ត្រង់កំពូល។ ដូច្នេះ យើងប្រើល្បិចនៃការកត់សំគាល់ ទី២ ហើយប្រើ ចតុកោណដែលមានបន្ទោយប្រវែង៣ដងនៃទទឹង។ យើង បានប្រាប់ជំហានសំខាន់ៗរួចហើយ នៅសល់ឡើយតែការងារលម្អិតដែលលោកអ្នកត្រូវបំពេញដោយខ្លួនឯង។ រៀងរាល់ជំហាន យើងត្រូវការចតុកោណកែងចំនួនស្មោះនឹងចំនួនជ្រុងនៃរូប

ដែលចតុកោណទាំងនោះមានជ្រុងប្រវែងស្មើជ្រុងទាំងនោះដែរ។ប្រសិនបើយើងដាក់ចតុកោណនៅផ្ទៃខាងក្រៅនៃបំណែករ៉ុនខុច បន្ទាប់មកវានឹងគ្របលើកំពូលថ្មី ដែលនឹងត្រូវគ្របលើចំហានបន្ទាប់។ វាងាយស្រួលនឹងត្រួតពិនិត្យ ថា យើងត្រូវការចតុកោណច្រើនដូចចំនួនជ្រុងនៃរូបដែរ។ នៅក្នុងត្រីកោណដើមយើងមានជ្រុងបី រូបបំលែងបន្ទាប់ យើងគុណចំនួននេះនឹង ៤ ក្នុងពេលជាមួយគ្នា យើងប្រើចតុកោណដែលមានជ្រុងតូចជាងមុន ៣ ដង ដែរ។ ដោយ $4 = 3^{\frac{\ln 4}{\ln 3}}$ យើងសន្និដ្ឋានបានថា វិមាត្រនៃបំណែករ៉ុនខុច គឺ $\frac{\ln 4}{\ln 3}$ ។

វិមាត្រនេះបានដោយ «រង្វាស់» មួយដែលសាំញ៉ាំ ឬដង់ស៊ីតេនៃភាគល្អិយមួយ។ ការពិតយើងមានអារម្មណ៍ថាព្រំសៃពីនស្គីហាក់ក្រាស់ជាងបំណែករ៉ុនខុច ដែលមើលទៅដូចខ្សែកោងដែលក្រាស់មួយ។ នេះគឺជាការឆ្លើយតបទៅនឹងការពិតដែលថា $\frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{\ln 4}{\ln 3}$ ។

ការអនុវត្តន៍

បណ្តាសរសៃឈាមនៃដុំពកៈ វាមិនមែនដូចនៅកន្លែងណាផ្សេងទៀតនៅក្នុងរាងកាយនោះទេ។ ការស្រាវជ្រាវ នាំមកត្រូវចំលើរឿងនេះ ដោយ ភាពសាំញ៉ាំសម្រាប់វិមាត្រភាគល្អិត ដែលត្រូវការសម្រាប់ បង្កើនលទ្ធភាព ក្នុងការធ្វើរោគវិនិច្ឆ័យតាមវិទ្យុសាស្ត្រ។

គម្រូប្លង់នៃខ្នែងទងសួតៈ អត្តពលិកជាន់ខ្ពស់ ដូចជាងាយនឹងកើតជំងឺហឺតជាងជនសាមញ្ញ។ ហេតុអ្វី ? អត្ថបទស្រាវជ្រាវ [Ma] បានសិក្សាលើ «ភាពអំណោយផល» នៃ សួត។ មានបំពង់ទងសួតចំនួន ១៧ ថ្នាក់ មុនពេលឈានមកដល់ស្រទាប់សួតក្រោយបំផុត ដែលមានបណ្តូរខ្យល់ដង្ហើម។ ប្រសិនបើបំពង់ទងសួតចង្អៀតពេក សម្ពាធនឹងកើនឡើងនៅពេលខ្យល់ជ្រៀតចូលទៅថ្នាក់បន្ទាប់នៃបំពង់ទងសួត។ ប៉ុន្តែ បើវាគឺធំទូលាយពេក នោះមាឌតាមថ្នាក់និមួយៗស្មើគ្នា យើងនឹងទទួលបាន មាឌធំបំផុត។ (វាគួរក្លាយជា អនន្ត ប្រសិនបើយើងមានចំនួនមិនកំណត់នៃ ថ្នាក់នៃទងសួត) ដូច្នេះ «ភាពអំណោយផល» នៃទងសួតគួរមានមាឌអប្បបរមាហើយគ្មានកំណើនសម្ពាធ។ ប៉ុន្តែទន្ទឹមនឹង នេះ ការរួមចុះតិចតួចនៃអង្កត់ផ្ចិតបំពង់ទងសួតមេ នឹង នាំឱ្យមានកំណើនសម្ពាធខ្ពស់ជាងការរួមចុះនៅថ្នាក់បន្ទាប់តូចជាង (នេះបណ្តាលមកពីទម្រង់មិនលីនេអ៊ែ ដែលកំណត់នូវសម្ពាធ)។ សួតរបស់មនុស្ស សាមញ្ញ មានបំពង់ទងសួតទូលាយ ជាងសួតដែលប្រកប «អំណោយផលតាមទ្រឹស្តី»។ មាឌទូលាយនេះ ផ្តល់នូវការការពារ ក្នុងករណី Bronchoconstriction ដែល ជាជំងឺមួយកើតពីការហើមទងសួត (ការថយចុះអង្កត់ផ្ចិតរបស់បំពង់ទងសួត) ដែលអាចបណ្តាលឱ្យកើតជំងឺហឺត។ អត្តពលិកមានសួតស្រដៀងទៅនឹង ភាពអំណោយផលរបស់សួតតាមទ្រឹស្តី ហើយដូច្នេះ វាគឺងាយងជំងឺជាង។

ពោះវៀនតូចៈ ផ្ទៃខាងក្រៅនៃពោះវៀនតូចមានផ្ទៃប្រហែល $0.5m^2$ ពេលដែលផ្ទៃខាងក្នុង មានផ្ទៃប្រហែល$300m^2$។ យើងបានឃើញនូវបំណែករ៉ុនខុច ដែលថាភាគល្អិតនៃខ្សែកោង អាចមានប្រវែងមិនកំណត់មួយ បើទោះបីជាវាលាតសន្ធឹងនៅក្នុងពីផ្ទៃកំណត់មួយក៏ដោយ។ នេះគឺជាល្បិច របស់ធម្មជាតិៈ ផ្នែកខាងក្នុងនៃពោះវៀនតូច គឺវាធំណាស់ ដោយវាប្រើសម្រាប់ការជ្រាប(នៃអាហារទៅក្នុងឈាម)។ ធម្មជាតិនៃ ភាគល្អិតរបស់ផ្ទៃខាងក្នុងបាន ធ្វើឱ្យសម្រេចបំណងនេះ។ ដូចគ្នាដែរ វាពិតសម្រាប់ផ្ទៃនៃស្រទាប់ចុងក្រោយនៃទងសួត។ ដោយខ្នែងទងសួតមានលក្ខណៈជាភាគល្អិត ដូចនេះផ្ទៃនៃស្រទាប់ចុងក្រោយមានទំហំណាស់ ដូច្នេះហើយវាបង្កឱ្យមានបណ្តូរឧស្ម័នអតិបរមា។

ឯកសារយោង

[Ma] B.Mauroy,M.Filoche, E.R. Weibel, B.~Sapoval, An optimal bronchial tree may be dangerous,Nature, **427** (2004),633-636.