

ភាពឆ្លុះគ្នា មួយជំហានម្តងមួយជំហានម្តង



ភាពឆ្លុះគ្នាជាទូទៅត្រូវបានគេចាប់អារម្មណ៍យ៉ាងខ្លាំងនិង បានបម្រើ មនុស្សជាតិ នៅក្នុងវិស័យជាច្រើនដូចជាស្ថាបត្យកម្ម សិល្បៈវិស្វកម្ម និងវិទ្យាសាស្ត្រផងដែរ។ អស់រយៈពេលជាងរាប់ពាន់ឆ្នាំហើយ ដែលគម្រូនៃភាពឆ្លុះត្រូវបានប្រើប្រាស់ដើម្បីបង្កើត (រចនា) គ្រឹះស្ថានកន្ត្រក កម្រាលឥដ្ឋ ក្រដាសបិទជញ្ជាំង ក្រដាសខ្ទប់ និងអ្វីៗផ្សេងៗទៀត។

នៅចុងសតវត្សទី 19 គណិតវិទូ និងភូគគុវិទូរុស្ស៊ី យ៉ែវក្រាហូហ្វីយូដូវ បានបង្កើតគម្រូនៃភាពឆ្លុះ 17 ប្រភេទនៅក្នុង ប្លង់ [WPG]។ មាតិកា យើងអាចតាង ភាពឆ្លុះទាំងអស់ដោយគម្រូនៃ 17 ប្រភេទហើយគ្មានអ្វីផ្សេងទេ! គួរដឹងថា ប្រភេទភាពឆ្លុះទាំងនោះ មានក្នុង ចម្លាក់តាំងពីបុរាណ។

ការកើតឡើងនូវគម្រូទាំង 17ប្រភេទនេះ ត្រូវបានបកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រ ដោយប្រើជំនាញបូកបន្ថែម នូវប្រភាគ និងតួប៉ូឡូដីបន្តិចបន្តួច នៅឆ្នាំ 1980។ ការពន្យល់នេះត្រូវបានរកឃើញដោយ ប៊ីល ហើយបានបោះពុម្ពផ្សាយយ៉ាងទូលំទូលាយដោយលោក ចន ហា. ខុនវ៉េ។ ខុនវ៉េ បានយកគំនិតរបស់ ជីសស្តុន បង្កើតនូវពាក្យហៅទ្រង់ទ្រាយរបស់ភាពឆ្លុះបួនគឺ កាឡេដូស្កុប¹ (Kaleidoscope) បង្វិលជុំ (Gyration) មហាស្វាប្ប (Miracle) និង អច្ឆរិយៈ (Wonder)។ ក្រៅពីការកំណត់ឈ្មោះក្រុមនៃភាពឆ្លុះនេះ ខុនវ៉េ បានបង្កើតនូវនិមិត្តសញ្ញា ដើម្បីជាជំនួយក្នុងការសិក្សាគឺ (x, y, z, o, x)។ ប្រភេទនៃភាពឆ្លុះនីមួយៗ តាមគំនិតរបស់ ជីសស្តុន និង ខុនវ៉េ ត្រូវគ្នានឹង តាងដោយសញ្ញាដែលធ្វើឱ្យការកំណត់នេះមានភាពទាក់ទាញជាងការកំណត់ពីមុនៗ នៃសញ្ញាណបែបបុរាណ។

ចំណាត់ថ្នាក់ ភាពឆ្លុះក្នុងប្លង់ ដោយ ខុនវ៉េ និងជីសស្តុន យើងនឹងពិនិត្យក្នុង ផ្នែកទី ២ ដោយប្រើនិមិត្តសញ្ញាសាមញ្ញ។ យើងបញ្ចប់ដោយជំពូក ៣ ដែលរៀបរាប់ពីភាពឆ្លុះរូបលើកម្រាលផ្លូវដើរ នៃប្រទេសព័រទុយកាល់ ក្នុងទីក្រុង រ៉ូដីសានណារ៉ូ (រូបទី១) ដែលប្រហែលជាឧទាហរណ៍ដ៏ល្អបំផុតជាអន្តរជាតិ។



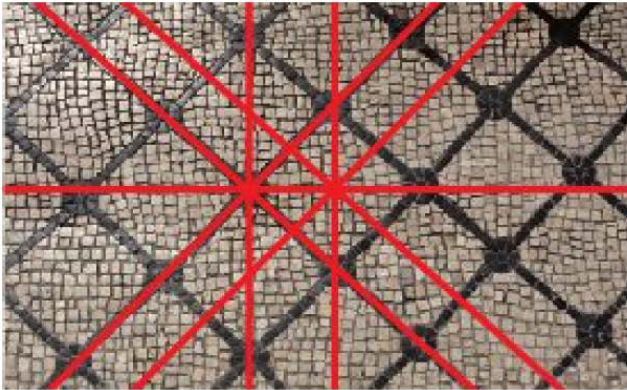
រូបភាព 1: កម្រាលផ្លូវដើរនៅរូស្ស៊ីអូ (លីសបោន) ភូប៉ាកាបាណា (រ៉ូដីសានណារ៉ូ) និង បេឡែម (លីសបោន)

១. ទ្រង់ទ្រាយនៃភាពឆ្លុះ

ទ្រង់ទ្រាយមួយនៃភាពឆ្លុះហៅថា កាឡេដូស្កុប ដែលវាបង្ហាញពីវត្តមានរបស់ភាពឆ្លុះជាស្រមោល ហើយតាងដោយសញ្ញា * ។ ជាឧទាហរណ៍ កៅអីអង្គុយធម្មតា វាមានភាពឆ្លុះ ធៀបនឹងប្លង់ឈរមួយ ដែលចែកកៅអីជាពីរចំណែក។

¹ បំពង់កែវដែលមានដាក់កំទេចក្រដាសពណ៌ក្នុងនោះ ហើយមានកញ្ចក់ចាំងឆ្លុះជាច្រើនជុំវិញ។ កាលណាយើងក្រឡុកវាយើងឃើញរូបជាច្រើនដែលឆ្លុះគ្នាបង្កើតបានជារូបផ្កា ឬរូបឆ្លុះគ្នាផ្សេងៗ។

ដូចនេះ សញ្ញាតាង គឺ * ។ នៅពេលដែលមានកញ្ចក់ជាច្រើនផ្ទាំង ដូចជានៅក្នុង ការឡើយដូស្តប យើងក៏តាងចំនួននៃកញ្ចក់ ចូលដែរ។ ឧទាហរណ៍ កម្រាលផ្លូវដើរ ដែលជារូបភាពសំណាញ់ប្រទាក់ក្រលាគ្នាដូចរូប 2 វាមានរាងដូចជាក្រឡាសៀវភៅ ដែលប្រកបដោយ ចំណុចឆ្លុះជាច្រើន។ ពិនិត្យផ្នែករាងត្រីកោណមួយ ដែលខ័ណ្ឌដោយ កញ្ចក់ឆ្លុះបី (មួយភាគប្រាំបីនៃកាដេ) ដែលយើងហៅវាថា ទីតាំងគ្រឹះ។ បើស្រមៃថាយើងស្ថិតនៅក្នុងត្រីកោណតូចនោះ ហើយមើលទៅកញ្ចក់ យើងនឹងអាចឃើញ រូបត្រីកោណច្រើនរាប់មិនអស់។ ពិនិត្យមើល លក្ខណៈភាពឆ្លុះ យើងត្រូវកំណត់នូវមុំនៃត្រីកោណ ឬក៏កំណត់នូវចំនួនកញ្ចក់ ត្រង់កំពូលនៃត្រីកោណ។ មានកញ្ចក់(ផ្ចិតឆ្លុះ) ៤ ប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចកណ្តាលនៃកាដេ ហើយមានកញ្ចក់(ផ្ចិតឆ្លុះ) ៤ ទៀតត្រង់កំពូលរបស់វា និងមានកញ្ចក់(ផ្ចិតឆ្លុះ) ២ ទៀតប្រសព្វគ្នាត្រង់ចំណុចកណ្តាលនៃជ្រុងកាដេ។ ដូចនេះភាពឆ្លុះនេះតាង ដោយសញ្ញា *442 ។



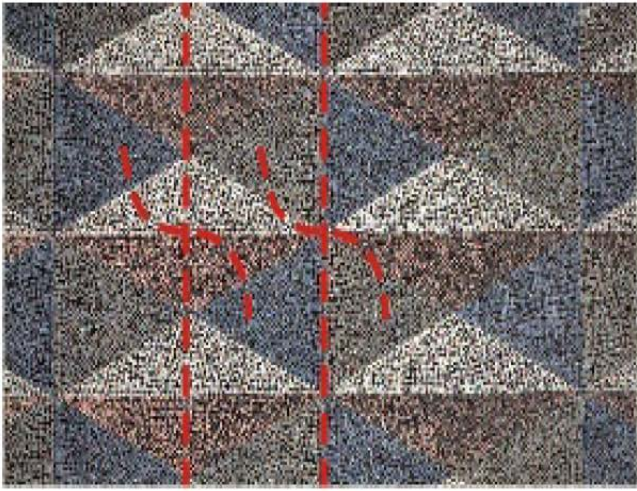
រូបភាព 2 : កម្រាលផ្លូវដើរនៅ វ៉ែ ហ្គារ៉េត នៅលីសបោន (នៅដូ) តាងដោយ*442

បង្វិលជុំ (Gyration) មិនមានវត្តមាននៃកញ្ចក់ទេ តែវាកំណត់ដោយមុំនៃការបង្វិល ដែលជាប្រភាគនៃ 360 ដឺក្រេ។ ជាឧទាហរណ៍ កម្រាលផ្លូវដើរ នៅក្នុងរូប 3 បានកំណត់ដោយការបង្វិល។ ផ្ចិតនៃបង្វិលជាចំណុចមូល 3 ដែលបង្ហាញក្នុងរូប មានមុំ $360^{\circ}/4, 360^{\circ}/4, 360^{\circ}/2$ ។ គេតាងដោយភាគបែងនៃមុំទាំងនោះគឺ 4 4 2។



រូបភាព 3: កម្រាលផ្លូវដើរនៅទីលាន វ៉ែស្តរ៉ាដូ នៅលីសបោន តាងដោយ4 4 2

ទ្រង់ទ្រាយភាពឆ្លុះ ដែលហៅថា មហាស្វារ្យ តាងដោយសញ្ញា X ដោយសារតែគម្រូនៃរូបភាពនេះ មិនមានឆ្លុះតាមកញ្ចក់ណាមួយទេ (តែវាឆ្លុះធៀបនឹងចំណុច) ។ ជាឧទាហរណ៍នៅក្នុងរូបភាព ៤។



រូបភាព 4: កម្រាលផ្លូវដើរដែលមាន 4 ពណ៌នៅជិត ម៉ូស្តរ៉ូ ដូស ចេរ៉ូនីម៉ោស នៅ លីសបោន តាងដោយ XX ទ្រង់ទ្រាយនៃភាពឆ្លុះអច្ឆរិយៈ តាងដោយសញ្ញា 0 ពេលដែលគ្មានវត្តមាននៃគម្រូទាំង 3 ខាងលើ។ ជាឧទាហរណ៍ កម្រាលផ្លូវដើរក្នុងរូបភាព 5 ត្រូវបានច្នៃប្រឌិតឡើងដោយគម្រូឈរ និងជួរដេកដដែលៗ ហើយត្រូវបានតាងដោយ



រូបភាព 5 : រូបភាពនៃកម្រាលផ្លូវដើរ តាងដោយ 0

២. គម្រូនៅក្នុងម្លូង

ការរៀបចំមួយអាចជួយយើងដើម្បីស្វែងរកនូវគម្រូទាំង 17 ប្រភេទនៅក្នុងក្រុមនៃគម្រូតាង ។ ឥលូវ យើងស្រមៃថាមានភោជនីយដ្ឋានភាពឆ្លុះ ដែលមានមុខម្ហូបដូចខាងក្រោម ៖

ម្ហូបប្រចាំថ្ងៃ	តម្លៃ	បន្សំ@
O	2	-
*	1	-
ចំនួន N	$\frac{N-1}{N}$	$\frac{N-1}{2N}$
X	1	-

@ 2, 3, 4...មានការបញ្ចុះតម្លៃ 50% នៅពេលបានបំរើត្រូវតាម a^* ។ ជាឧទាហរណ៍ 3 មានតម្លៃ 2/3 € និង បន្សំជាមួយ * 3 មានតម្លៃ $1+1/3 = 4/3$ €។

យើងស្រមៃទៅករណីដែលទាល់ យើងមានលុយសម្រាប់ទិញអាហារថ្ងៃត្រង់ត្រឹមតែ 2€ តើយើងអាចបានម្ហូប អ្វីខ្លះ ដែលថ្លៃប៉ុនណោះ? ឧទាហរណ៍ ជម្រើស *42 មានតម្លៃ $1 + 3\text{€} + 3\text{€} + 1\text{€} = 2$ € ជម្រើសមួយទៀត 22X ក៏មានតម្លៃ $1/2+1/2+1 = 2$ €ដែរ។

ទ្រឹស្តីបទអស្ចារ្យនៃប្លង់: ប្រភេទនៃគម្រូនៅក្នុងប្លង់ សមមូលទៅនឹងបន្សំនៃសញ្ញា ដែលមានតម្លៃសរុបស្មើៗ។

តើមានប្រភេទអ្វីខ្លះនៃគម្រូ? ហើយតើទ្រឹស្តីបទនេះបានមកពីណា?

ប្រើទ្រឹស្តីបទអស្ចារ្យនៃប្លង់ ចម្លើយនៃសំណួរដំបូងនេះគឺគ្មានអ្វីលើសកាផ្ទៀងតាមលំហាត់នោះទេ។ បើគ្មានសញ្ញា * ទេនោះ តម្លៃចំនួននីមួយៗ គឺយ៉ាងតិចណាស់ $1/2$ និងជាទូទៅតូចជាង 1 ។ ដូចនេះហើយបញ្ជីនៃសញ្ញាដំបូង ដោយគ្មានសញ្ញា * គឺ

6 3 2, 4 4 2, 3 3 3, 2 2 2 2, X X, 2 2 X, O 1

ពិតណាស់ តាង a, b, c ចំនួននៃបន្សំ *abc ស្មើតម្លៃ 2 នៅពេលដែល $a b... c$ មានតម្លៃស្មើ 2។ ដូចនេះ បញ្ជីខាងលើមុននេះនូវរក្សាទុកដដែល ដោយគ្រាន់តែបន្ថែមសញ្ញា* គឺ

* 6 3 2, *4 4 2, * 3 3 3, *2 2 2 2, *X X, *2 2 X, *O 1

បើសិនយើងអាចបូកបញ្ចូលទាំងប្រភេទអ្នកអាចបានបញ្ជីជាមួយសញ្ញាជាច្រើន:

4*2, 3*3, 2*22, 22*1

ពីនោះ យើងបង្ហាញបានថា មាន 97 ទម្រង់នៃគម្រូ។

ទាក់ទងនឹងសំណួរទីពីរ អ្នកអានអាចដឹងចម្លើយពី[NOS] ដើម្បីដឹងពីដើមកំណើតនៃទ្រឹស្តីបទអស្ចារ្យនៃប្លង់។ សៀវភៅ [CBG] មានការវិភាគលម្អិត និងរូបពន្យល់ក្បោះក្បាយ។ ក្នុងសៀវភៅនោះ ក៏ពន្យល់ពីពិលំហ ដែលគម្រូមានតម្លៃតូចជាង២ នឹងអ្វី ដែលមានតម្លៃលើសពី ២។

៣. គណិតវិទ្យានៃផ្ទៃក្រាលថ្នល់

កម្រាលថ្នតាមថ្នល់នៃប្រទេសព័រទុយកាល់ មានតាំងពីសតវត្សទី 19 ជាគំនិតដ៏ដ្ឋងដ្ឋើម ដើម្បីឱ្យមានការងារសម្រាប់ អ្នកទោសនៅបន្ទាយ សៅ ចច។ ចាប់ពីពេលនោះមក វាក្លាយជារូបលំអសម្រាប់ទីក្រុង លីសបោន ដែលមានម៉ូតកម្រាលថ្ន ដែលប្រើច្រើនបំផុតសម្រាប់ផ្លូវដើរនៅក្នុងតំបន់ប្រវត្តិសាស្ត្រនៃប្រទេសព័រទុយកាល់។



រូបភាព 6: គម្រូ អុនដាសដូ ម៉ាឡាចចូ តាងដោយសញ្ញា 2 2 *

គម្រូដ៏ល្បីល្បាញបំផុត អុនដាសដូ ម៉ាឡាចចូ (មានន័យថា រលកនៃសមុទ្រក្រៅ) បានប្រើក្នុងឆ្នាំ 1849 ក្នុងរាជស្តេច ប៉េដ្រូ ទី៤ នៃប្រទេសព័រទុយកាល់ ដែលភាគច្រើនគេហៅថា រូស្សូ បាននាំចេញទៅ កាប៉ាកាបាណា ក្នុងឆ្នាំ 1906 ជាមួយជោគជ័យដ៏អស្ចារ្យ។ ដូចយើងឃើញក្នុងរូប 1។ ក្នុងពេលជាមួយគ្នានេះដែរ ស្តេច ប៉េដ្រូ ទី៤ ក៏ជាអធិរាជទី១ ប៉េដ្រូ ទី១ នៃ ប្រទេសប្រេស៊ីលដែរ។

ក្នុង អុនដាសដូ ម៉ាឡាចចូ យើងអាចឃើញ កញ្ចក់សមមូល និងប្រភេទពីរ (សនិងខ្មៅ) នៃបង្វិលជុំ ដែលចន្លោះ រវាងរលក ស្តើងមែនទែន។ នៅទីនេះ តាងដោយសញ្ញា 2 2 * មើលរូបទី ៦។

តើយើងអាចប្រមូលនូវគ្រប់ភាពឆ្លុះនៃ កម្រាលថ្នផ្លូវនៅព័រទុយកាល់?

ការសិក្សាស្រាវជ្រាវនៅលីសបោន ពីប្រភេទភាពឆ្លុះនៅប្រទេសព័រទុយកាល់ បង្កើតបានបញ្ជីរួម។ ប្រភេទ 4 * 2 ត្រូវបានរកឃើញនៅ ហ្គីម៉ាវ៉េ។ នៅសល់តែប្រភេទគម្រូមួយចំនួន មិនទាន់រកឃើញនៅឡើយគឺ៖

6 3 2, 3 3 3, * 3 3 3, 2 2 X, 2 2 X, O

ដូចបានបង្ហាញប្រភេទ O នៅរូបទី៥ មានគម្រូបនប្រភេទទៀត ត្រូវរកនៅក្នុងរូបទី ៧។ ឧទាហរណ៍ដទៃទៀត អាចឃើញក្នុង [PEF]។



រូបភាព 7: រូបកន្ត្រក កម្រាលតុ កាឡេដូស្តុប និងអេប៉ុង បង្ហាញនូវភាពឆ្លុះតាងដោយសញ្ញា 632, 333, *333, 22X ត្រូវរៀងគ្នា យើងសំនូមពរដល់អ្នកអានទាំងអស់ ជួយរកគម្រូបនៃភាពឆ្លុះនៅទីជិតខាងរបស់អ្នក។ អ្នកនិពន្ធសូមថ្លែងអំណរគុណ ចំពោះការគាំទ្រ ពីគ្រប់ទិសទី។

៤. ឯកសារយោង

- [CBG] Conway, J. H., H. Burgiel, C. Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, A K Peters, 2008.
- [NOS] Cannas da Silva, A., *Um Novo Olhar Sobre Simetria*, <http://www.math.ethz.ch/~acannas/Outreach>.
- [PEF] *Padroes em Falta*, <http://www.math.ethz.ch/~acannas/Outreach>.
- [SPP] *Simetria Passo a Passo - Matematica nas Calçadas de Lisboa*, <http://www.math.ist.utl.pt/simetria>.
- [WPG] *Wallpaper Group*, http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group.

Department of Mathematics, ETH Zurich, 8092 Zurich Switzerland e Departamento de Matematica, Instituto Superior Tecnico, 1049-001 Lisboa, Portugal

កិច្ចការនេះបានទទួលបានការឧបត្ថម្ភមួយផ្នែកពី មូលនិធិ សម្រាប់វិទ្យាសាស្ត្រ និងបច្ចេកវិទ្យា ពីរទុយកាល់ និងពី មូលនិធិ ហ្គូលបែនគៀន ពីរទុយកាល់។ រូបភាព លីសបោន ដោយ ចៅ ហ្វែរ៉ាន់ រូបភាពទី៧ ដោយ ជ្រូបា ណាថាន់។