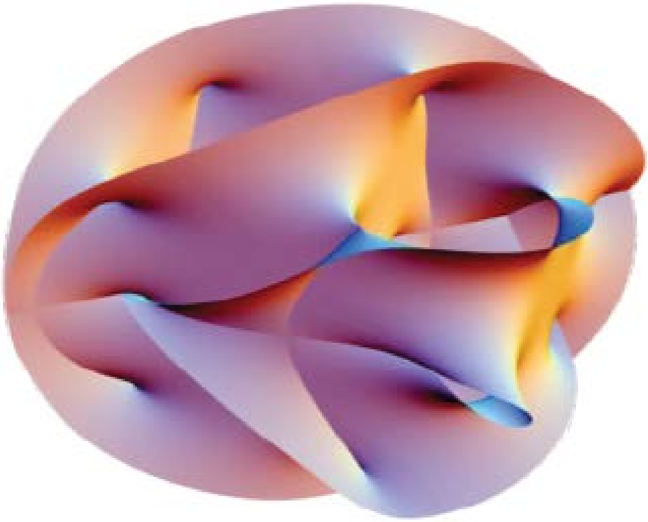
វិមាត្រខ្ពស់Higher Dimensions

អ្នកនិពន្ធដើម៖ ម៉ាគូស រ៉ាប់ភើត និង ហាន់ចច វ៉េហ្គាន់

(Markus Ruppert and Hans-Georg Weigand)



រូបភាពទី1:បង្ហាញពីផ្ទត់ ខាលីប៊ីយៅ(សំខាន់សំរាប់ពណ៌នា ពីគម្រូលំហវិមាត្រខ្ពស់ ក្នុងទ្រឹស្តីចំណងថ្នាក់ខ្ពស់ (superstring-theory)

១. ការរង់ចាំមើលវិមាត្របន្ទាប់

តើពិភពលោកយើង ពិតជាមានវិមាត្រច្រើនជាងវិមាត្របីមែនឬទេ? បើដូច្នោះមែន តើមានវត្ថុអ្វី ដែលនៅក្នុងលំហវិមាត្រខ្ពស់ ដែលអាចយល់ដោយប្រើវិញ្ញាណមមៃនឹក ឃើញបាន ឬមួយក៏មាន ប្រផ្នូលបង្ហាញ បែបណាទៅ? ទ្រឹស្តីទំនាក់ទំនងបានប្រើវិមាត្របួន ដើម្បីពន្យល់ពីគន្លឹះ នៃលំហពេល *(Space-time)* ហើយវិមាត្រប្រាំមួយចាំបាច់ដើម្បីពន្យល់ពីការបត់បែន នៃលំហពេល និងការខុសគ្នានៃទ្រឹស្តីចំណង *(String theories)* ដែលប្រើសំរាប់ការបង្ហាញរហូតដល់វិមាត្រ 26 (ឧទាហរណ៍ ល. បូតែលហ៊ូ *.L. Botelho, 1999)*។ ទីតាំងផ្សេងមួយទៀត សម្រាប់ការអនុវត្តធាតុវិមាត្រខ្ពស់ និងតំណាងក្នុងវិមាត្របីរបស់វា គឺជាការសិក្សារចនាសម្ព័ន្ធ ក្នុងទម្រង់គ្មានខួប នៃគ្រីស្តាល់វិទ្យាទំនើប *(Crystallography)*។ ស្របតាមគោលការណ៍នៃ ចំណោលក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់ នៃសំណុំចំណុចវិមាត្រខ្ពស់ (ដូចជាគ្រោងចំនួនគត់ក្នុងវិមាត្រ5) ទៅលើវិមាត្របី ត្រូវបានគេទទួលស្គាល់ថាជាគម្រូក្នុងទម្រង់គ្មានខួប នៃសម្ព័ន្ធគ្រីស្តាល់ (មើលចំណុចទី ៥ ខាងក្រោម)។

ឧទាហរណ៍ទាំងនេះបង្ហាញពីលក្ខណៈចំបងនៃគំនិតមួយបែបគណិតវិទ្យា៖ បើសិនវាងាយស្រួល ឬមានប្រយោជន៍ ដើម្បីបង្កើតសម្មតិកម្មពីហេតុការណ៍ធម្មតាទៅជាហេតុការណ៍ក្នុងលំហវិមាត្រខ្ពស់ នោះវិមាត្រពិសេសបី អាចពង្រីកបាន។ បញ្ហានេះគេអាចពន្យល់យ៉ាងងាយ តាមធម្មតា។ ដូច្នេះ សមីការលីនេអ៊ែ មានអថេរបី ត្រូវបានគេបកស្រាយជាប្លង់ក្នុងលំហ សមីការលីនេអ៊ែរ ដែលមានអថេរបួន ត្រូវបានបកស្រាយ ជាអ៊ីពែរប្លង់ ក្នុងលំហវិមាត្របួន។ ដូចគ្នាដែរ ចំពោះសមីការលីនេអ៊ែ n អថេរ ត្រូវបានបកស្រាយជាអ៊ីពែរប្លង់វិមាត្រ $(n-1)$ ក្នុងលំហមានវិមាត្រ n ។ ពេលគេប្រើអថេរច្រើនជាងបី គុណប្រយោជន៍នៃការពង្រីកវិមាត្រ បានចំណេញច្រើន ភាពសាមញ្ញនៃការពណ៌នាទំនាក់ទំនងគណិតវិទ្យា។ វាមិនទាមទារការគណនានូវរូបមន្តពិជគណិត និងលេខសាស្ត្រ ដើម្បីមានការនឹកមមៃតាមវិញ្ញាណ នៅក្នុងលំហវិមាត្រខ្ពស់ទេ។ ប៉ុន្តែម្យ៉ាងទៀត ការ ធ្វើបែបនេះនាំឱ្យឈានទៅរកសំនួរ នៃ ការពន្យល់លទ្ធផលជាលក្ខណៈធម្មតា ក្នុងពិភពពិតៗ។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ត្រូវតែមាន ការពិពណ៌នា យ៉ាងហោចណាស់ ពីធាតុជា មូលដ្ឋាននៃលំហវិមាត្រខ្ពស់ ក្នុងលំហវិមាត្របីនៃយើង។

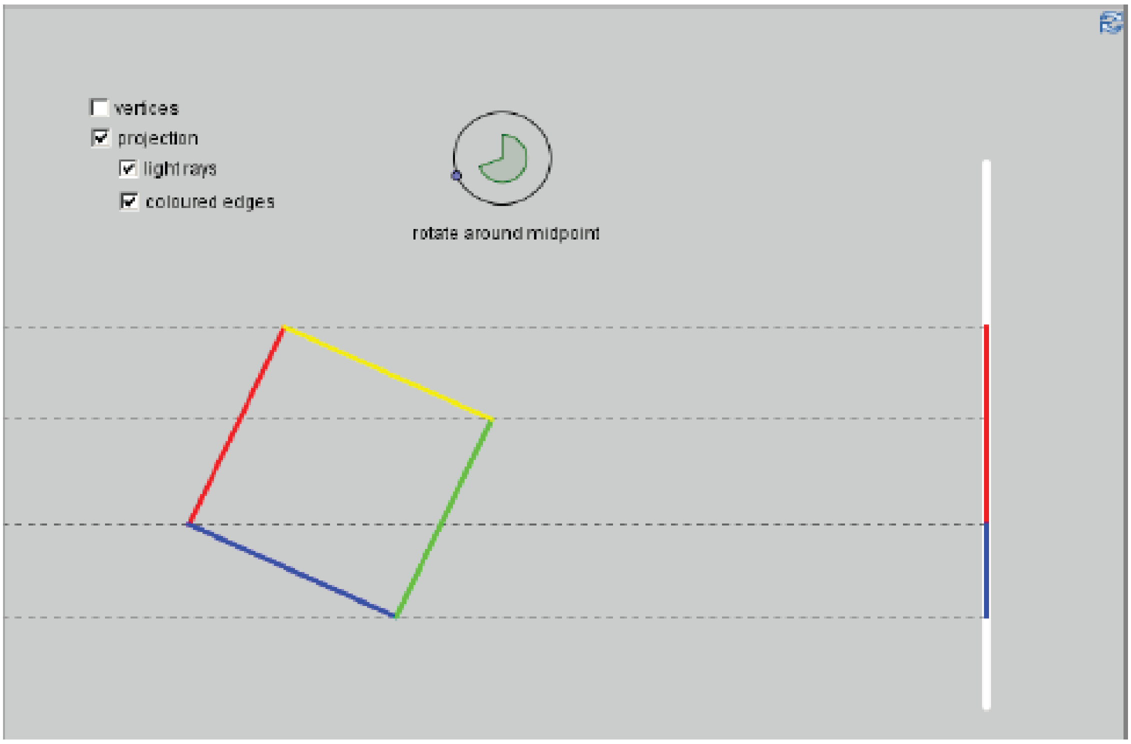
បន្តទៅនេះ ជាមួយនឹងការបង្ហាញនូវ វិវត្តធាតុលំហវិមាត្រខ្ពស់ នៃប្រធានបទយើង នឹងត្រូវពិភាក្សាតាមរយៈ គម្រូធាតុវិមាត្របួន គឺ គូបវិមាត្របួន។ នឹងមានការបង្ហាញថា លំហវិមាត្របួន និង ខ្ពស់ជាងនេះ មាន ការប្រដូចបានជាច្រើនយ៉ាង។ ការប្រើលំនាំគំនិតដូចគ្នា ដើម្បីយល់ពីលំហវិមាត្រខ្ពស់ ជាធាតុ មូលដ្ឋាន។ គោលដៅ បីខាងក្រោមនឹងត្រូវបង្ហាញនិងវិភាគគឺ៖

1. ចំណោលធាតុវិមាត្រខ្ពស់ទៅលើអ៊ីពែប្លង់។
2. ប្រសព្វរវាង(អ៊ីពែ) គូប និង(អ៊ីពែ) ប្លង់។
3. ការពង្រីកប្រព័ន្ធនៃគោលការណ៍កូអរដោនេ។

២. ចំណោល *(Projection)*:

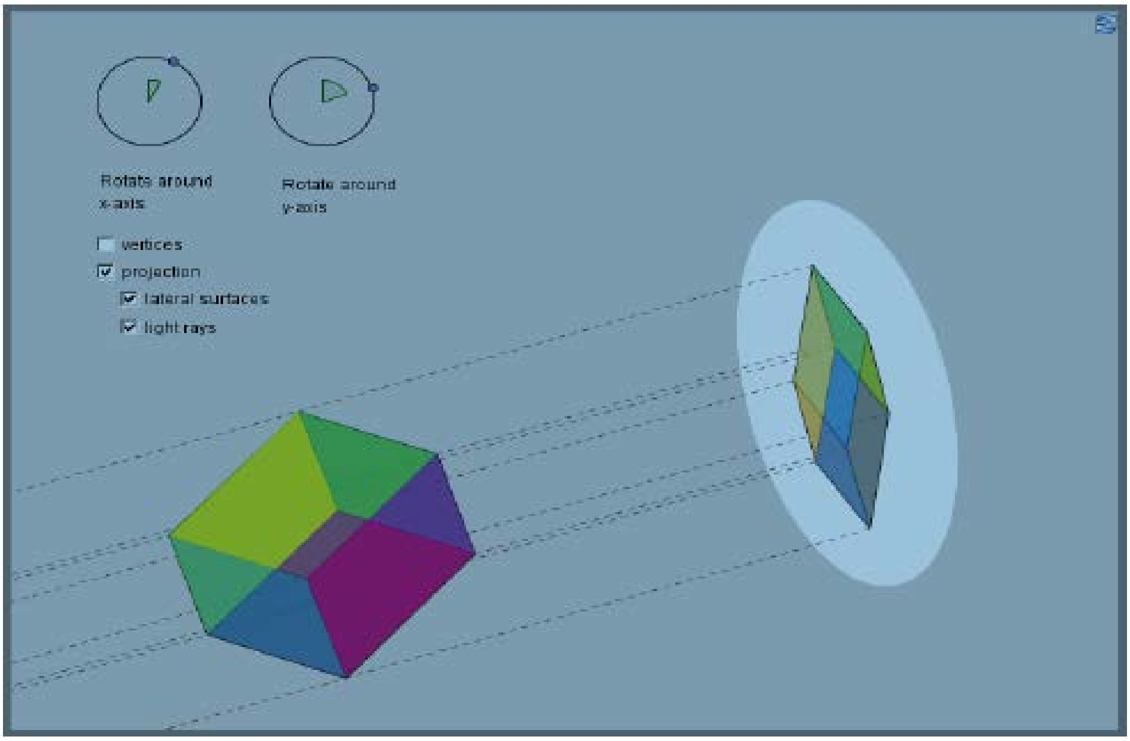
នៅក្នុងផ្នែកនេះ គំនិតជាមូលដ្ឋាននៃការពិពណ៌នា លំហវិមាត្រខ្ពស់ តាមរយៈចំណោលធាតុ នៃលំហវិមាត្រខ្ពស់។ ជាពិសេសចំណោលកែង កាត់តាមអង្កត់ទ្រូង នៃអ៊ីពែគូប n វិមាត្រ ក្នុងលំហ $(n-1)$ វិមាត្រ អាចបង្ហាញដោយងាយស្រួល។

ឧទាហរណ៍ 1: ចំណោលនៃការ៉េ និងគូប



រូបភាពទី2.1:ការបញ្ចាំងរូបភាពការេទៅប្លង់វិមាត្រ2

(អ្នកសសេរ:*Sebastian Hammmer , University ofWurzburg*)



រូបភាពទី2.2:ការបញ្ចាំងរូបភាពគូបទៅប្លង់វិមាត្រ2

(អ្នកសសេរ:*Sebastian Hammmer , University ofWurzburg*)

ចំពោះ $1 \le i \le 4$ តាង A_i ជាកំពូលការ៉េ។ ចំណោលនៃរូបភាពទី2.1 ជាប្រសព្វនៃបន្ទាត់។

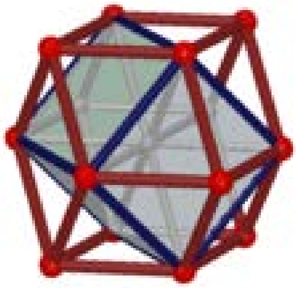
$g_1: \overrightarrow{X} = A_1 + k.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(1 \le i \le 4)$ ដែលមានបន្ទាត់ $h: x_1 + x_2 = 0$ ។ នេះជាចំណោលកែង។ ដូចគ្នានេះដែរ ចំណោលនៃអ៊ីពែរគូប n វិមាត្រ អាចពណ៌នាដោយចំណោលកូអរដោនេនៃកំពូល។ យើងពិនិត្យរកចំណុចប្រសព្វ នៃបន្ទាត់

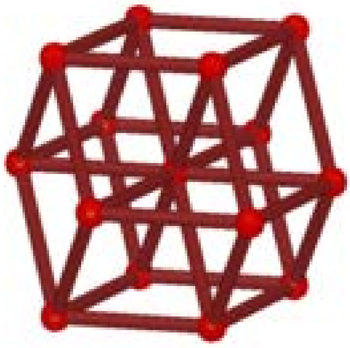
$$g_1: \overrightarrow{X} = A_1 + k.\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, (1 \le i \le n^n)$$

ជាមួយនិងអ៊ីពែប្លង់ វិមាត្រ$(n-1)$

$$R: x_1 + \dots\dots + x_n = 0$$

វ៉ិចទ័រ$(1,1,\dots,1)$ កែងទៅនឹងអ៊ីពែប្លង់ R ហើយបន្ទាត់ g_i ជាបន្ទាត់កែងនឹងអ៊ីពែប្លង់ R កាត់តាមកំពូល A_i ។ បន្ទា ប់ពីការសន្មតថាមានភាពដូចគ្នានៃចំណោលខាងលើ ដូចជាថាកំពូលមានរូបភាពដូចគ្នា ក្នុងករណីចំណោល ពិសេសបែបនេះ យើងបានរូប ទី3.2 តំណាងឲ្យចំណោលកែងនៃអ៊ីពែគូបវិមាត្របួន លើលំហវិមាត្របី។





រូបភាពទី 3.1:ចំណោលនៃអ៊ីពែគូបវិមត្របួន។ ចំណោលនៃចំណុចតែមប្រាំបី លើកំពូលនៃគូបវិមាត្របី។

រូបភាពទី 3.2: ចំណោលនៃអ៊ីពែគូប វិមាត្របួន គម្រូស្រមៃ

ឧទាហរណ៍ទី២៖ ចំណោលនៃអ៊ីពែគូប

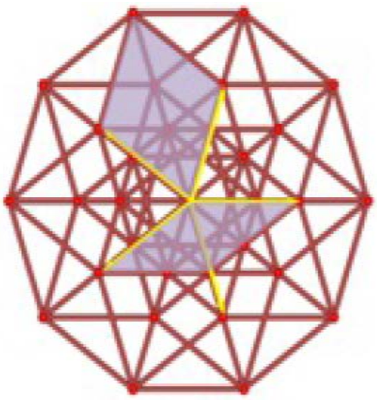
រូបភាព 2.2 បង្ហាញនូវការកកើតវ៉ិចទ័របីនៃគូប និងរូបភាពរបស់វា បានពីចំណោល កែងតាមតួអង្កត់ទ្រូង។ កំពូលទាំងអស់នៃគូបគឺជាបន្សំលីនេអ៊ែ នៃវ៉ិចទ័រទាំងនេះ ប្រកបដោយមេគុណ 0 និង 1។ ភាពលីនេអ៊ែនៃចំណោលនេះ នាំឱ្យបាននូវរូបភាពដូចគ្នានៃកំពូលទាំងអស់។

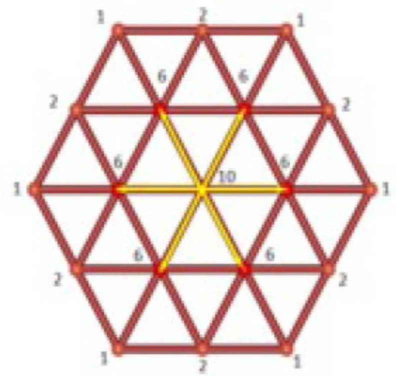
ពេលពិពណ៌នាពីគូប n វិមាត្រជាមួយបន្សំលីនេអែ នៃ n វ៉ិចទ័រលីនេអែរមិនអាស្រ័យគ្នា គេអាចបង្ហាញដូចតទៅ៖ ចំពោះគូប n វិមាត្រ មានចំណោលកែងលើ R^2 និងប្លង់ចំណោល ដែលរូបភាពបានមកពីវ៉ិចទ័រ ត្រូវនឹងចំណុចជាកំពូលនៃពហុកោណនិយ័ត មាន n ជ្រុង។ យោងទៅតាមការកើនឡើងរូបភាពនៃកំពូលផ្សេងៗទៀត លទ្ធផលចុងក្រោយ ត្រូវគ្នានឹងបន្សំលីនេអ៊ែ។ (ចំពោះ $n = 3$ មើលរូបភាពទី2.2 និងឧទាហរណ៍ 1 ដែលមានត្រីកោណកើតឡើងដោយវ៉ិចទ័រ)។

ដើម្បីឲ្យយល់ពីរបៀបដែលចំណោលនៃអ៊ីពែគូប n វិមាត្រ លើលំហ វង kវិមាត្រ យើងបានបង្ហាញជាដំបូងថាតើគូបធ្វើចំណោលទៅជា បន្ទាត់ ក្នុងលំហវិមាត្របី៖ ចំពោះគ្រប់ កំពូលនៃគូប មានប្លង់កែងនឹងបន្ទាត់ ដែលមានកំពូលនោះ។ ចំណុចប្រសព្វនៃអ៊ីពែប្លង់ទាំងពីរ គឺជាចំណោលកែងនៃកំពូលលើលំហវងk វិមាត្រ។

ដូចនេះ ចំណោលវិមាត្រពីរ នៃគូបវិមាត្រប្រាំ អាចកំណត់បាន៖ យោងទៅលើរូបភាព ដែលបង្កើតនូវវ៉ិកទ័រ (ចោលទៅលើកំពូលនៃបញ្ចកោណនិយ័ត) រូបភាពនៃកំពូលគូប ដែលអាចរកឃើញបន្ទាប់ពីបន្ថែមវ៉ិកទ័រទាំងនោះ។ (មើលរូបភាពទី 4.1)។

សង្កេតចំណោលនៃគូបវិមាត្រប្រាំ នោះ រូបភាពនៃជ្រុងរបស់គូប បង្កើតទ្រង់ទ្រាយដែលយើងធ្លាប់បានស្គាល់រួចមកហើយ គឺ *Penrose – Rombs* (មើលក្នុង សេណេឆាល់ (Senechal 1995))។ បាតុភូត គួរឱ្យកត់សម្គាល់មួយទៀត បង្ហាញក្នុងរូបភាពទី 4.2 ។ ចំណោលនៃអ៊ីពែគូប វិមាត្រ 6 តាមអង្កត់ទ្រូងរបស់វា មានចំណុចបញ្ចប់ពី $(0,0,0,0,0,0)$ ទៅ$(1,1,1,1,1,1)$ មានកំពូលជាច្រើន ដែលមានចំណោលដូចគ្នា។ ចំនួននៃបុរេរូបភាព ត្រូវបានបង្ហាញក្នុងរូបភាព 4.2។





រូបភាពទី 4.1:ចំណោលនៃគូបឯកតាវិមាត្រ5 លើប្លង់រូបភាពទី 4.2: ចំណោលនៃគូបឯកតាវិមាត្រ 6 លើប្លង់

៣.ការប្រសព្វនៃគូប

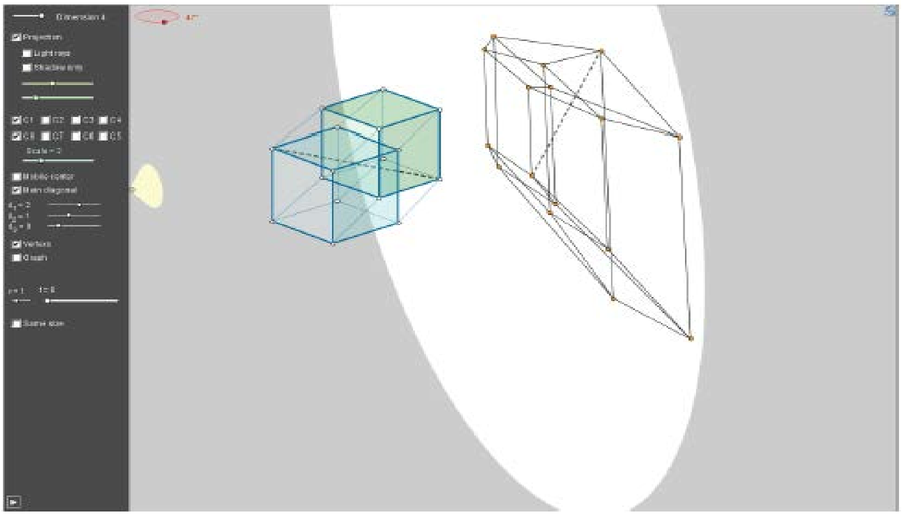
ការបង្ហាញដោយស្វាត់ជំនាញនៃអ៊ីពែគូបវិមាត្រ 4 បានមកដោយឡែរូបរាងខុសៗគ្នា នៃប្រសព្វវាជាមួយអ៊ីពែប្លង់មានវិមាត្របីកាត់គ្នា។ ជាដំបូងគូបមួយ (ក្នុងលំហវិមាត្របី) ដែល កាត់ជាមួយប្លង់ត្រូវបានពិនិត្យ។ សន្មតថា វត្ថុនេះធ្វើការផ្លាស់ប្តូរទីតាំងដោយល្បឿន (*V*)។ ជាពិសេស វាមានភាពងាយស្រួល ក្នុងការពិពណ៌នាពីស្ថានភាពនេះ នៅពេលគូប (មាន ទ្រនុងប្រវែង a) ភ្ជាប់ជាមួយអ័ក្សកូអរដោនេ។ ប្លង់ $E(t)$: $x_1+x_2+x_3-\sqrt{3}.v.t=0$ ផ្លាស់ប្តូរតាមអង្កត់ទ្រូងនៃគូបប្រកបដោយល្បឿន (*V*) ជាមួយគូបនេះ។ ដោយ គូបជាវត្ថុប៉ោង វាគ្រប់គ្រាន់ ដើម្បីកំណត់ចំណុចប្រសព្វនៃទ្រនុងគ្រប់ពេល។ យើងយកផ្នែកដែលកាត់គ្នា សំបកប៉ោងនៃចំណុចប្រសព្វទាំងនោះ។

ប្រសព្វលំហវិមាត្របី ពេលមានចលនាផ្លាស់ប្តូរតាមអ៊ីពែគូបវិមាត្រ 4 ត្រូវបានគេប្រៀបដូចតទៅ៖

អ៊ីពែគូបវិមាត្រ 4 ដែលមាន ទ្រនុងប្រវែង α នឹងកាត់ជាមួយលំហ $R(t)$ ដោយចលនាមានល្បឿន v នៃអង្កត់ទ្រូងអ៊ីពែគូប។ ដូច្នេះ យើងកំណត់តាមការប្រៀបដូចតទៅ:

$$R(t): \quad x_1+x_2+x_3+x_4-2.v.t=0$$

ជាថ្មីម្តងទៀត វាល្មមគ្រប់គ្រាន់ដើម្បីយល់ពីចំណុចប្រសព្វនៃអ៊ីពែគូបជាមួយប្លង់*R*។



៤. ធរណីមាត្រនៃកូអរដោនេ

អង្កត់ប្រវែងមួយឯកតានិងការ៉េឯកតា អាចសន្មតថា ជាវិមាត្រមួយ ឬវិមាត្រពីរ នៃ គូប ឯកតា។ ពិនិត្យមើលកូអរដោនេនៃកំពូលក្នុងប្រព័ន្ធកូអរដោនេ យើងបានកំពូលគឺ៖

- អង្កត់មួយមានឯកតា $A_1 = (0)$ $A_2 = (1)$
- ការេមួយមានឯកតា $A_1 = (0|0)$ $A_2 = (1|0)$ $A_3 = (0|1)$ $A_4 = (1|1)$
- គូបមួយមានឯកតា $A_1 = (0|0|0)$ $A_2 = (1|0|0)$ $A_3 = (0|1|0)$ $A_4 = (1|1|0)$

  $A_5 = (0|0|1)$ $A_6 = (1|0|1)$ $A_7 = (0|1|1)$ $A_8 = (1|1|1)$

តាមរយៈការបូកកូអរដោនេបន្តគ្នាជាមួយមេគុណ 0 និង 1 កូអរដោនេ នៃកំពូល ក៏ដូចជាចំនួនកំពូលនៃអ៊ីពែគូបឯកតាវិមាត្រ ៤ ឬ៥ អាចរកឃើញ។ បម្លែងកិលនៃអ៊ីពែគូប វិមាត្រខ្ពស់ អាចធ្វើទៅដោយ ការមមៃ ហើយអាចសន្មតជាភាពជាប់នៃគោលការណ៍កូអរដោនេ។ ការសន្មតបន្សំ នាំទៅរកទំនាក់ទំនងនៃចំនួន $N(n,k)$ នៃ «ជាយគូប» វិមាត្រ k របស់គូបវិមាត្រ n (មើល *Graumann*, 2009)

$$N(n,k) = \binom{n}{k}.2^{n-k}$$

រូបមន្តនេះគេទទួលបានដោយការសង្កេត៖

1. រាល់«ជាយគូប» វិមាត្រ k ស្របជាមួយអ៊ីពែប្លង់វិមាត្រ k ដែលជាការអនុវត្តន៍នៃវិចទ័រវិមាត្រk នៃគូបវិមាត្រ n (មើលផ្នែកទី3)។ ជាវិបាក កូអរដោនេនៃកំពូលស្ថិតនៅលើគូបមួយ ជាមួយនឹង «ជាយ គូប» វិមាត្រ k ដែល ខុសគ្នាយ៉ាងតិច ណាស់ k មេគុណ(ហើយរាល់កំពូលស្ថិតនៅក្នុងគូបនេះ)។
2. មាន $\binom{n}{k}$ ជម្រើស នៃមេគុណ k ពីក្នុង n។
3. មាន 2^n ជម្រើស នៃ«កំពូលដំបូង»។
4. មាន 2^k កំពូលដំបូង នាំទៅរក «ជាយគូប» តែមួយ។

ឧទាហរណ៍ 3: គូបវិមាត្រ 3 $(n=3)$

ចំនួនកំពូល$(k=0)$: $N(3,0) = \binom{3}{0}.2^{3-0} = 8$

ចំនួនទ្រនុង $(k=1)$: $N(3,1) = \binom{3}{1}.2^{3-1} = 12$

ចំនួនមុខ $(k=2)$: $N(3,2) = \binom{3}{2}.2^{3-2} = 6$

ចំនួនគូប $(k=3)$: $N(3,3) = \binom{3}{3}.2^{3-3} = 6 = 1$

លទ្ធផលនេះ អាចបង្ហាញតាមតារាងដូចតទៅ (អ្នកនិពន្ធ ម៉ាគូស វ៉ាប់ភឺត សាកលវិទ្យាល័យ រូសបូគ)

n\k	0	1	2	3	4	5	...	k	...	n
0	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	2	1	-	-	-	-	-	-	-	-
2	4	4	1	-	-	-	-	-	-	-
3	8	12	6	1	-	-	-	-	-	-
4	16	32	24	8	1	-	-	-	-	-
5	32	80	80	40	10	1	-	-	-	-
6	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-
7	...	...	...	...	...	...	...	-	-	-
8	...	...	1792	1792	...	...	...	-	-	-
...								-	-	-
k								1	-	-
...								...	...	-
n	2^n	$n \cdot 2^{n-1}$	$\binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}$	...	...	...	...	$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$	...	1

ជាដំបូង ដេញតាមព្រួញលឿង តារាងបង្ហាញនូវការរៀប ចំណុចមួយ ដូចគូបមាន វិមាត្រ 0 មានន័យថា រូបមន្តខាងលើសម្រាប់ករណី $n=0$។ ចំនួនបន្តបន្ទាប់ដែលមានពណ៌ផ្សេងៗ នាំទៅកាន់ការព្យាករណ៍ ដោយប្រើរូបមន្ត សម្រាប់ $N(n,k)$ ខាងលើ។ ឧទាហរណ៍

- $N(n,n-1)=2n$ (ពណ៌ក្រហម)
- $n.N(n-1,0)=N(n,1)$ (ពណ៌បៃតង)
- ចំពោះគ្រប់ $t\geq 1$, $N(3t-1,t-1)=N(3t-1,t)$ (ពណ៌ខៀវ)

ម្យ៉ាងទៀត យើងទទួលបានរូបមន្តបន្តសម្រាប់គណនា ករណីគូប n វិមាត្រ មានទ្រង់ទ្រាយទាក់ទងនឹង $(n-1)$ វិមាត្រ។

$N(n,k)=2.N(n-1,k)+N(n-1,k-1)$ ។

ឧទាហរណ៍ 4: សំរាយបញ្ជាក់រូបមន្តខាងលើ

$$N(n,k)=2.N(n-1,k)+N(n-1,k-1)=2\binom{n-1}{k}.2^{2n-1-k}+\binom{n-1}{k-1}.2^{n-1-(k-1)}$$
$$=\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right].2^{(n-k)}$$
$$=N(n,k)=\binom{n}{k}.2^{n-k}$$
$$=N(n,k)$$

ពិតណាស់ អំណះអំណាងផ្នែក ពិជគណិតទាំងនេះ នឹងអាច បកស្រាយតាមបែបធរណីមាត្រយ៉ាងងាយស្រួល ហើយបម្លែង ជាករណីធរណីមាត្រផងដែរ។

៥.ក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់ ជាចំណោលពីវិមាត្រខ្ពស់ជាង

ចាប់ផ្តើមដោយការសន្មតទុកជាមុនតាមបែប គ្រីស្តាល់វិទ្យាបុរាណ ថាលក្ខណៈនៃគ្រីស្តាល់មែនទែន គឺលក្ខណៈ បម្លែងឆ្លុះកិល (មានន័យថា វារក្សារូបរាងដដែលបន្ទាប់ពី បម្លែងបីដែលមិនអាស្រ័យគ្នា) ដែល សំណង់បែបនេះ តាមគណិតវិទ្យា ជាប្រភេទដែលយើងធ្លាប់ស្គាល់ហើយ គឺ « លក្ខខ័ណ្ឌនៃគ្រីស្តាល់វិទ្យា» ដែលអនុញ្ញាតរង្វិលពិសេស សម្រាប់តែលំដាប់ 2, 3, 4និង6។ នេះជាភាពត្រូវគ្នាទៅនឹងការសង្កេតលក្ខណៈរូប ដោយ ស៊ែតម៉ាន់ និង ក្រុមគេ (1984) ដែលបានរកឃើញ សំណង់មិនខួបនៃគ្រីស្តាល់ (គ្មានរង្វិលពិសេស) ក្នុងសំលោហៈ អាលុយមីញ៉ូម ម៉ង់កាណែស (*Al-Mn–alloy*) ដែលមានរង្វិលឆ្លុះប្រាំស្រទាប់។ គ្រីស្តាល់វិទូ ហៅសំណង់បែបនេះហៅថា ក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់ ។ ដើម្បីកាន់តែច្បាស់បន្ថែមទៀតៈ

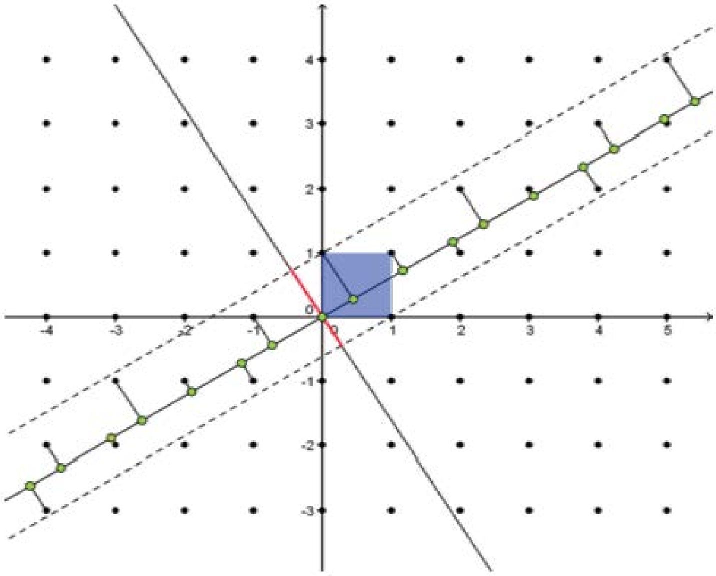
ក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់ ជាទម្រង់ដែលរៀបតាមលំដាប់ តែមិនមានខួប។ វាជាទម្រង់គម្រូ ដែលបំពេញលំហ ដែលទោះបីជា វាមានបម្លែងឆ្លុះកិលតិចតួចក៏ដោយ។

ប៉ុន្តែក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់អាចមានទម្រង់សាំញាំៈ ការខ្សត់បម្លែងឆ្លុះកិល នាំឱ្យយើងពិបាកកំណត់ច្បាប់ ដែលគម្រូ ទាំងនោះកើតឡើង នៅក្រៅតំបន់ដែលយើងសង្កេត។ នេះក៏តាមទារការសិក្សាគម្រូតាំងនេះ ពីអ្នកគណិតវិទ្យាដែរ។ របកគំហើញកើតឡើង ពេលដែលគេសង្កេតឃើញថា មានក្វាស៊ីគ្រិស្តាល់ជាច្រើន ដែលរាងមិនមានខួប តែមាន ចំណោលសាមញ្ញលើគម្រុយអាភីន លំហរងវិមាត្រតូចជាង នៃលំហវិមាត្រខ្ពស់។ ពិតណាស់ ចូរមើលឧទាហរណ៍ ខាងក្រោមៈ

ឧទាហរណ៍ទី 5: ក្វាស៊ីគ្រិស្តាល់វិមាត្រមួយ

សម្រាប់បន្ទាត់ $g_1:\ y=(T-1).x$ ក្នុង $\mathbb{R}^2$ ហើយបន្ទាត់កែង $g_2: y=\frac{1}{-\tau}\cdot x$ កាត់តាមគល់អ័ក្ស $\tau=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$។ យើងសន្មតថាចំណោលកែងនៃការ៉េឯកតា លើបន្ទាត់ g_2 (អង្កត់ពណ៌ក្រហម)។ ជាបន្តទៅទៀត យើងពិនិត្យមើលចំណុច

ទាំងនោះលើ $\mathbb{Z}^2$ដែលមានរូបភាពតាមចំនោលនេះ ស្ថិតនៅលើអង្កត់ពណ៌ក្រហម។ ចំណុចទាំងនេះបង្កើតចំណោលកែងលើ g_1(ចំណុចបៃតង)។



រូបភាពទី6: ក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់វិមាត្រមួយ

ប្រវែងអង្កត់លើចំណោលបន្ទាត់ មានតម្លៃ តែពីរគត់ប៉ុណ្ណោះ (ត្រូវគ្នានឹងចំណោលជ្រុងនៃការ៉េឯកតា)។ ដូច្នេះ យើងអាចនិយាយពី « សំណាង់តាមលំដាប់»។ រំកិលតាមបន្ទាត់ ស្ទីតនៃតម្លៃទាំងនោះមានរាងច្របូកច្របល់ គ្មានលក្ខណៈ ឆ្លុះបន្តិចសោះ។ ប៉ុន្តែបើសិនជាយើងពង្រីកជាសាកលដែលមានវិមាត្រពីរនោះ អ្វីៗគ្រប់យ៉ាងវាច្បាស់ឡើង៖ ក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់របស់យើង ជាផ្នែកមួយនៃចំណោលនៃក្រឡាការ៉េធម្មតា។ ការពង្រិកវិមាត្រនាំឱ្យយើងមានការយល់ដឹង អំពីសំណង់លាក់កំបាំង នៃក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់។

បាតុភូតនេះ បានដំណើរការទៅពេញលេញ។ ដូចជា សេណាឆាល់ (*Sebechal*) (1995) បានពណ៌នា រួចហើយ ពីនិយ័តភាព និងការប៉ាន់ប្រមាណ វិធីសាស្ត្រនៃចំណោល និងវិធីបែងក្រឡា បង្កើតជាសំណុំខ្សែបន្ទាត់ក្វាស៊ី ។ ជាឧទាហរណ៍ ចំណោលផ្នែកនៃគូបវិមាត្រ 5 ($\mathbb{Z}^5$) ទៅលើប្លង់ ជា សំណុំចំណុច (ដូចមានក្នុងសម្រាយបញ្ជាក់ខាងលើ) អាច ទទួលបាន និងអាចគិតថា ជាក្វាស៊ីគ្រីស្តាល់ ក្នុង វិមាត្រពីរ។ សំណុំចំណុចរបស់វាបង្ហាញនូវគ្រប់កំពូល ពីខ្សែឈរដូច *Penrose–tilling* នៃប្លង់ (កើតពីចតុកោណស្មើពិសេសពីរ សូមប្រៀបធៀប ចំណុច ២ និងរូបភាព4.1)។

សន្និដ្ឋាន

យើងបានរកឃើញវិធីមួយ ដែលជាការងារគណិតវិទ្យា ដែលអាចសង្ខេបជាប្រយោគដូចខាងក្រោម៖

" គណិតវិទ្យាធ្វើឲ្យយើងមើលឃើញនូវអរូបី"

ពេលអ្នកមិនយល់ពីអ្វីមួយ អ្នកព្យាយាមដូរទស្សនវិស័យ។ ទស្សនវិស័យថ្មីអាចពន្យល់អ្នក នូវអ្វីដែលលាក់កំបាំង។ នេះគឺជាអ្វីដែលកើតឡើងរួចមកហើយ ពេល ដែលអ្នកព្យាយាមយល់ពីរូបរាងរបស់កោន៖ អ្នកជ្រើសរើសប្រព័ន្ធកូអរដោណេ ដែលមានសមីការសាមញ្ញហើយបង្វិល ដើម្បីបង្ហាញរូបរាងរបស់កោន។

អ្វីដែលសិស្សទទួលបានពីស្នាដៃស្តីពីវត្ថុមានវិមាត្រខ្ពស់ គឺពហុផ្ទត់។ គេអាចនឹង៖

- ឃើញលើកដំបូងនូវ អត្ថន័យនៃវិមាត្រខ្ពស់ក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រ។
- ដឹងពីវិធីផ្សេងៗដោះម្បីទទួលបាននូវវត្ថុក្នុងវិមាត្រខ្ពស់
- ប្រើការធៀបដើម្បីពង្រីកចំណេះដឹងពីវិមាត្របីនៃពិភពលោក។
- ប្រើលក្ខណសម្បត្តិនៃវត្ថុក្នុងពិភពលោក ជាកោលការណ៍នៃពិភពអរូបី។
- រំលឹកនិងបន្ទរគំនិតស្តីពីចំណោលនៃវិមាត្របី ឈើប្លង់។

ឯកសារយោង

[1] **BOTELHO, L.; BOTELHO, R.**: *Quantum Geometry of bosonic strings – Revisited.* Notas de Física, Centro Brasileira de Pesquisas Físicas (1999).
[2] **CAYLEY, A.**: *On Jacobi's elliptic functions, in reply to the Rev.*.; and on quaternions. Philosophical Magazine. (1845) Nr. 26, S. 208–211.
[3] **DELONE B.N.**, *Geometry of positive quadratic forms*, Usp. Mat. Nauk 3 (1937), S. 16-62, und Usp. Mat. Nauk 4 (1938), S. 102-164. (Russisch)
[4] **GRAUMANN, G.**: *Spate in drei und mehr Dimensionen.* MU 55/1 (2009), S. 16-25
[5] **HAMILTON, W. R.**: *On quaternions, or an new system of imagineries in algebra.* Philosophical Magazine.(1844) Bd. 25(3), S. 489-495.
[6] **LAGARIAS, J.**: M*eyer's concept of quasicrystal and quasiregular sets.* Community of Mathematical Physics 179 (1996), S. 365-376.
[7] **MEYER, Y.**: *Algebraic numbers and harmonic analysis.* North Holland (1972)
[8] **RIEMANN, B.**: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Habil.). Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 13 (1868)
[9] **RUPPERT, M.**: *Würfelbetrachtungen. Drei Wege zu höheren Dimensionen.* MU 56/1 (2010), S. 34-53.
[10] **SCHLÄFLI, L.**: *Theorie der vielfachen Kontinuität* (1852). Denkschrift der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, Bd. 38, 1., Hrsg. Graf, J. H. (1901), S. 1-237.
[11] **SENECHAL, M.**: *Quasicrystals and geometry.* Cambridge University Press (1995)

The development of the concept of higher dimensional geometry was started with Hamilton's (1844), Cayley's (1845), Schläfli's and Riemann's scientific works.