ចំណាត់ថ្នាក់វត្ថុ

បង្ហោះនៅ ថ្ងៃទី ១៦ ខែមេសា ឆ្នាំ ២០១៤ ដោយលោក អង់ទាន់ ណិចទូ (AntoineNectoux)
និពន្ធដោយលោក គ្រិស្តស្ទាន រ៉ូសូ (Christiane Rousseau)

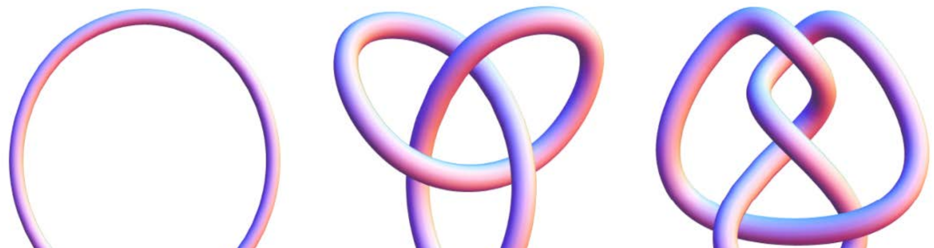
គណិតវិទ្យាបានផ្តល់ឧបករណ៍សម្រាប់ធ្វើចំណាត់ថ្នាក់វត្ថុ។ ប៉ុន្តែសួរថា តើមានការយក ទៅអនុវត្តខ្លះដែរឬទេ? លើសការស្រមៃដំបូងរបស់យើង ...វាអាចឲ្យយើងសន្និដ្ឋានបានថា ចំណងមួយអាចឲ្យយើងស្រាយបានដោយមិនចាំបាច់កាត់ខ្សែ ដោយមិនខ្វល់ថា យើងបង្វិលដូច ម្តេចក្នុងលំហ។ វាក៏អាចប្រាប់អ្នកផងដែរថា ការផ្គុំឡើងវិញខុស នូវគូបរូប៊ីក (Robik's cube) ក្រោយពីការរុះរើទៅជាចំណែក គឺគ្មានវិធីអ្វីទៅធ្វើឱ្យវាត្រូវវិញបានទេ។

ក្នុងការអនុវត្ត ចំណាត់ថ្នាក់វត្ថុ មានន័យថា ជាការចាត់ក្រុមវត្ថុ ទៅក្នុងថ្នាក់មួយ ដែលមានលក្ខណៈរួមគ្នា។ វិធីមួយដែលល្អប្រសើរបំផុតក្នុងការធ្វើចំណាត់ថ្នាក់ នេះគឺឆ្លងកាត់ ទំនាក់ទំនងសមមូល។ បន្ទាប់មកវត្ថុនីមួយៗចាត់ជាធាតុរបស់ថ្នាក់សមមូលមួយ។ ប៉ុន្តែមិនមែន មានន័យថាយើងមានវិធីតែមួយនៃការបង្ហាញថ្នាក់សមមូលនោះទេ។ សញ្ញាណគណិតវិទ្យា នៃភាពមិនប្រែបានផ្តល់នូវវិធីដ៏ល្អមួយក្នុងការអនុវត្តនេះ។ ភាពមិនប្រែនៃវត្ថុគណិតវិទ្យា (វាអាចជាលេខ) វាមានក្នុងធាតុទាំងអស់នៃថ្នាក់សមមូលមួយ។ ក្នុងចំណោមភាពមិនប្រែ ទាំងអស់យើងអាចញែកភាពមិនប្រែពេញលេញ ដែលបញ្ជាក់ពីថ្នាក់សមមូល។

ក្នុងអត្ថបទខ្លីនេះ យើងនឹងមើលឧទាហរណ៍ជាច្រើន និងបង្ហាញថា សញ្ញាណភាពមិនប្រែ ប្រើប្រាស់យ៉ាងទូលំលាយនៅក្នុងគណិតវិទ្យា ជាពិសេស ពីជគណិតនិងធរណីមាត្រ។ អ្នកនឹង អាចបន្ថែមនូវឧទាហរណ៍របស់ខ្លួននៅពេលបន្ទាប់។

ចំនួនអប្បបរមានៃការកាត់គ្នានៃចំណងមួយ

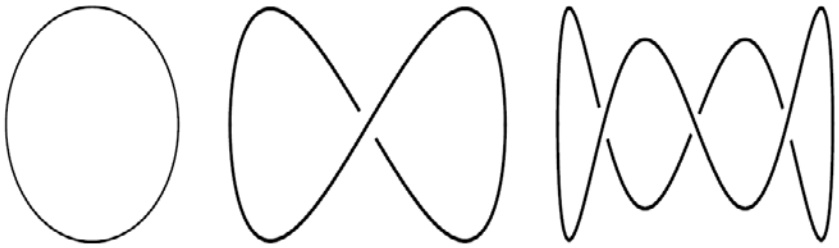
អ្វីដែលយើងហៅនៅក្នុងគណិតវិទ្យាថា ចំណងមួយ គឺជាខ្សែជាប់គ្នាមួយក្នុងលំហ។ (មើលរូបទី១)



(a) Unknot (b) Trefoil (c) Figure eight

រូបទី១ ចំណងបីនៅក្នុងលំហ។ ចំនួនអប្បបរមាការគូសកាត់ក្នុង Trefoil គឺ៣ ហើយក្នុងរាងលេខប្រាំបី គឺ៤

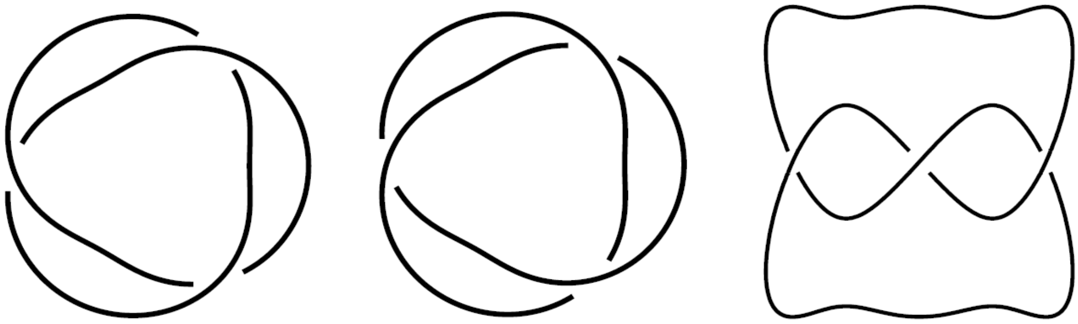
វាគឺជាទម្លាប់នៃការបង្ហាញក្នុងប្លង់ការគូសកាត់គ្នាមួយ ដែលយើងអាចមើលឃើញថាផ្នែកណានៅខាងលើ និងផ្នែកណាមួយនៅខាងក្រោមដូចរូបទី២និងទី៣។



(a) (b) (c)

រូបទី២៖ រូបតំណាងនៃចំណងសាមញ្ញ

លើរូបទី២ (a) អ្នកឃើញចំណងមួយដែលមិនកាត់គ្នា។ បើសិនចំណងនោះជាខ្សែមួយ នោះយើងអាចចល័តវានៅក្នុងលំហហើយដាក់បង្ហាញនូវការកាត់គ្នាជាច្រើនដូចរូប(b) និង(c).



(a) Trefoil left (b) Trefoil right (c) Trefoil left

រូបទី៣

រូបភាពទី៣ បង្ហាញចំណង Trefoil ខាងឆ្វេង មានការកាត់គ្នាបីកន្លែង។ វាមិនអាចបង្ហាញចំណងនេះដោយកាត់គ្នាតិចជាងបីកន្លែងនោះទេ៖ សម្រាយបញ្ជាក់នេះមិនងាយប៉ុន្មានទេ តែនៅទីនេះយើងនឹង រម្លងចំណុចនេះ។ មានវិធីផ្សេងជាច្រើនទៀតនៃការបង្ហាញចំណងមួយ។ ជាការពិតណាស់ រូបទី៣ (a) និង(c) បង្ហាញចំណងពីរដូចគ្នា។

កន្លងមកហើយ យើងមិនទាន់កំណត់ទំនាក់ទំនងសមមូលនៃចំណងនៅឡើយទេ ទោះជាយើងបានប្រើវាទាំងស្រុងហើយក៏ដោយ។ ចំណុចដែលយើងនឹងប្រើនោះ គឺថា ចំណងពីរសមមូលគ្នា បើសិនចំណងនោះអាចប្តូរទៅជាចំណងផ្សេងទៀត ដោយចល័តនៅក្នុងលំហ រួមបញ្ចូលទាំងការទាញ ឬសង្កត់វា។ ជាមួយនឹងទំនាក់ទំនងសមមូលនេះ ចំនួនអប្បបរមានៃការកាត់គ្នា នៃចំណងមួយគឺមិនផ្លាស់ប្តូរទេ។ មានពីរថ្នាក់សមមូលនៃចំណង ដែលកាត់គ្នាតិចបំផុតត្រឹម៣ ៖ Trefoil ខាងឆ្វេង និង Trefoil ខាងស្តាំ ក្នុងរូបភាពទី៣ គឺមិនសមមូលគ្នាទេ។ នេះបញ្ជាក់ថា ចំនួនអប្បបរមានៃការកាត់គ្នា មិនអាចកំណត់ចំណាត់ថ្នាក់ចំណងបានទេសម្រាប់ទំនាក់ទំនងសមមូលរបស់យើង។ ចំណុចនេះនាំយើងទៅរកនិយមន័យ នៃភាពមិនប្រែពេញលេញ។

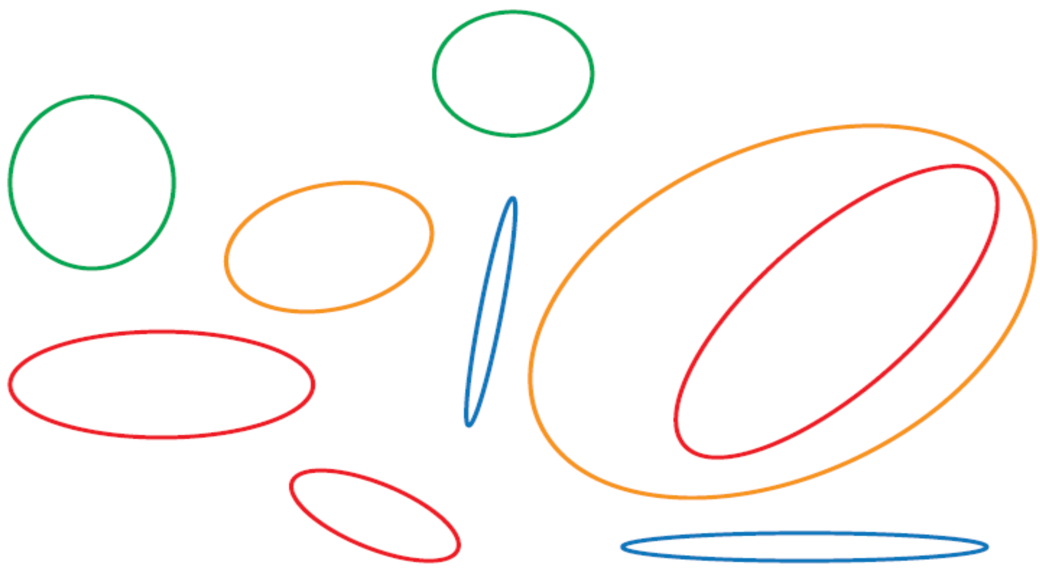
ភាពមិនប្រែពេញលេញ មានន័យថា វត្ថុពីរសមមូលគ្នា លុះត្រាតែ វាមានភាពមិនប្រែពេញលេញដូចគ្នា។ ចំនួនអប្បបរមានៃការកាត់គ្នារបស់ចំណង គឺមិនមែនជាភាពមិនប្រែពេញលេញ ព្រោះចំណងខាងឆ្វេង និងស្តាំ នៃ trefoil មិនសមមូលគ្នា ទោះបីជាវាទាំងពីរមានចំនួនអប្បបរមានៃការកាត់គ្នាស្មើនឹង ៣ ដូចគ្នាក៏ដោយ។ ជាទូទៅចំណងពីរមិនសមមូលគ្នាទេ បើសិនជាវាមិនមាននឹងកំណួចមិនសំខាន់។

ជាទូទៅ ប្រសិនបើវត្ថុពីរមិនមានភាពមិនប្រែ(ទាំងអស់) ដូចគ្នាទេ នោះវាមិនសមមូលគ្នាទេ។

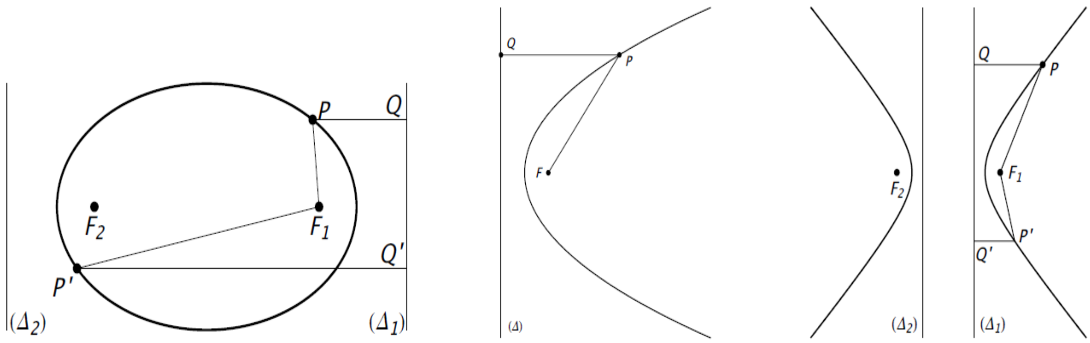
អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេនៃកោន(ខ្នាត់កោន)

ដំបូងយើងរំឭកនិយមន័យនៃខ្នាត់កោនមួយ ដែលមានកំណុំ និង បន្ទាត់ប្រាប់ទិសមួយ។ គេឲ្យចំណុច F និងបន្ទាត់D មួយមិនកាត់តាមចំណុច F និងចំនួនគត់វិជ្ជមាន e មួយ។ កោនដែលមានកំណុំ P បន្ទាត់ប្រាប់ទិស D និងអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ e គឺជាទីតាំងនៃចំណុចធរណីមាត្រ ដែលស្ថិតនៅចម្ងាយស្មើគ្នាពីចំណុច P និងបន្ទាត់ប្រាប់ទិស D គឺស្មើនឹងប្រវែង e។ ឱ្យច្បាស់ជាងមុនទៅទៀតថា ប្រសិនបើ P ជាចំណុចមួយនៅលើប្លង់ ហើយ Q ជាចំណោលនៃចំណុច P លើបន្ទាត់ D នោះP នៅលើកោនលុះត្រាតែ (មើលរូបភាពទី៥)

$$\frac{|PF|}{|PQ|} = e. \qquad (1)$$



រូបទី 4: អេលីបជាច្រើន។ អេលីបដែលមានពណ៌ដូចគ្នាមានអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេ ដូចគ្នា។



(a) Ellipse (b) Parabola (c) Hyperbola

រូបទី 5: និយមន័យនៃកោនជាមួយអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេរបស់វា

អ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេកំណត់នូវរូបរាងនៃកោន (សូមមើលរូបទី 4) ។ វាជាភាពមិនប្រែក្រោមទំនាក់ទំនងសមមូល ដែលរក្សាលក្ខណៈរូបរាង។ តើអាចនឹងមានអ្វីជាទំនាក់ទំនងសមមូល ? ទំនាក់ទំនងសមមូលនេះ គឺភាពប្រហែល

គ្នា។ ការប្រហែលគ្នានោះជា ការបំលែងអាហ្វីននៃរក្សាមុំថេរ។ ដោយប្រើការកំណត់តាមកុំផ្លិច វាអាចមានរាង $z \mapsto az + b$ ប្រសិនបើវា មិនផ្លាស់ប្តូរទិស ឬ $z \mapsto a\bar{z} + b$ បើវាបានប្តូរទិស។ វត្ថុធរណីមាត្រពីរក្នុងប្លង់មានភាពប្រហែលគ្នា ប្រសិនបើវត្ថុមួយជារូបភាពនៃវត្ថុមួយទៀតតាមលក្ខណៈប្រហែល។

អ្វីដែលគួរឱ្យកត់សម្គាល់ជាមួយនឹងនិយមន័យនៃកោតពី (1) គឺថាវាកើតពីខ្សែសង្វាក់មួយដែលបញ្ជាក់ថាកោនពីរប្រហែលគ្នា លុះត្រាតែវាមានអ៊ិចសង់ទ្រីស៊ីតេដូចគ្នា។ ជាការពិតណាស់ ភាពស្រដៀងគ្នានៃបន្ទាត់ថេរមួយជាសមាមាត្រនៃចម្ងាយ និង ចំណោលកែង(អរត្តូកូណាល់)។ ហេតុដូច្នេះ សំណុំនៃដែលបំពេញលក្ខខណ្ឌ (1) គឺឱ្យដោយភាពប្រហែលគ្នាទៅសំណុំនៃចំណុច P'' ផ្ទៀងផ្ទាត់ថា $\frac{|P''F''|}{|P''Q''|} = e$ ដែល F'' ជា រូបភាព នៃ F និង Q'' ជាចំណោលនៃ P'' ទៅលើរូបភាព D'' របស់ D ។ ជាករណីពិសេសយើងទទួលបានថា ប៉ារ៉ាបូលទាំងអស់គឺស្រដៀងគ្នា។

ទម្រង់នៃលំហតូប៉ូ

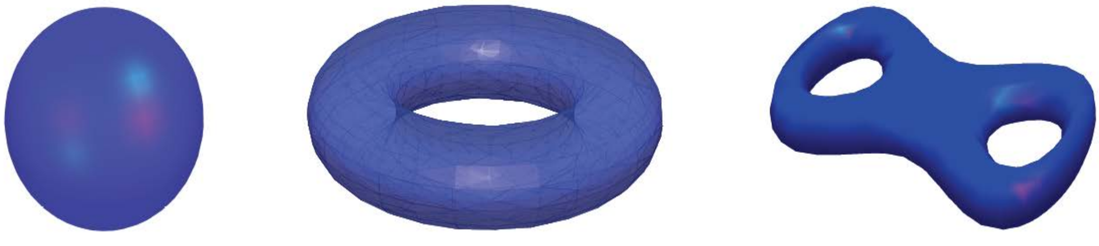
លំហតូប៉ូ គឺ ស្រដៀងនឹងទម្រង់វត្ថុនៃធរណីមាត្រមួយដែលបានបង្កើតឡើងដោយ ចំណុចនៃសំណុំមួយភ្ជាប់ជាមួយនឹងចំណុចផ្សេងទៀតដែលនៅជុំវិញវា។ តមកទៀត ចំណុចដែលនៅជុំវិញ Pខិតទៅជិតចំណុច P នោះ។ ដូចគ្នានេះដែរ អនុគមន៍ជាប់រវាង លំហតូប៉ូ ឱ្យរូបភាពកាន់តែខិតទៅជិតរូបភាពនៃចំណុចនោះដែរ។ យើងចង់កំណត់សញ្ញាណនៃភាពសមមូលមួយ រវាងលំហតូប៉ូដែលនឹងបង្កើតទម្រង់ដូចខាងក្រោម៖ ឧបមាថាលំហតូប៉ូ បង្កើតឡើងដោយសារធាតុយឺតមួយចំនួន ដែល យើងអាចផ្តាច់ ពង្រីក ឬ បង្ហាប់។ បន្ទាប់មកដរាបណាយើងមិនបំបែកសារធាតុនេះទេ យើងចង់និយាយថាលំហដើមនិងលំហចុងមានតម្លៃស្មើគ្នា។ ភាពឆ្លុះនៃទំនាក់ទំនងសមមូលនេះ គឺជាសញ្ញាណនៃ លំហតូប៉ូអូម៉េអូម៉ហ្វីស (Homeomorphic Topological space)។

លំហតូប៉ូពីរ Xនិង Yអូម៉េអូម៉ហ្វីស (homeomorphic) លុះត្រាតែមានអនុវត្តន៍មួយទល់មួយ $F : X \to Y$ ដែលជាប់ និងច្រាសមកវិញក៏ជាប់ដែរ។ យើងចង់និយាយថា អនុវត្តន៍ F អូម៉េអូម៉ហ្វីសរវាង X និង Y។

បន្ទាប់មកយើងអាចកំណត់សញ្ញាណនៃវិមាត្ររបស់លំហតូប៉ូ។ ដើម្បីកំណត់វិមាត្រនៃលំហតូប៉ូ ទាល់តែធ្វើដោយល្អិតល្អន់ ប៉ុន្តែយើងនឹង មិនលំអិតអំពីវាទេនៅទីនេះ។ ក្នុងករណីពិសេស ដែលលំហតូប៉ូគឺជាសំណុំរងនៃ n យើងយោងទៅអត្ថបទខ្លីស្តីពី វិមាត្រ។ សម្រាប់ការគិតរបស់អ្នក ខ្សែកោង គឺវត្ថុវិមាត្រមួយ ផ្ទៃគឺវត្ថុវិមាត្រពីរ និងមាឌគឺវត្ថុវិមាត្របី។ ដូច្នេះស្វ៊ែរមានវិមាត្រពីរ និងបាល់តាន់មានវិមាត្របី។ អ្វីដែលសំខាន់នោះគឺថាវិមាត្រនៃលំហតូប៉ូមួយ គឺជាការមិនប្រែប្រួលទំនាក់ទំនងសមមូល។ បន្ទាត់មួយ គឺមិនអូម៉េអូម៉ហ្វីសទៅនឹងប្លង់ទេ។ ប៉ុន្តែវិមាត្រជាការប្រែមិនពេញលេញទេ ជាឧទាហរណ៍ បន្ទាត់ និងរង្វង់វត្ថុទាំងពីរមានវិមាត្រមួយ ប៉ុន្តែមិនសមមូលទេ។

ពពួកនៃផ្ទៃ

ឥឡូវនេះយើងគិតពីផ្ទៃ ហើយយើងកំណត់ខ្លួនយើងត្រឹមផ្ទៃបិទជិត។ ឧទាហរណ៍មានក្នុងរូបទី 6។



(a) sphere (b) torus (c) 2-torus

រូបទី 6: ស្វ៊ែរមួយ កង នឹងកងរន្ធពីរ

ផ្ទៃទាំងនេះមានប្លង់ប៉ះនៅគ្រប់ចំណុច យើងថា៖ ពួកវាមានឌីហ្វេរ៉ង់ស្យែលហើយពួកវាមានទិសដៅ មានន័យថាពួកវាមានពីរផ្នែក គឺផ្នែកខាងក្នុង និង ផ្នែកខាងក្រៅ។ យើងចង់កំណត់នូវភាពសមមូល រវាងផ្ទៃដែលមានឌីផេរ៉ង់ស្យែល៖ ផ្ទៃដែលមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលពីរ X និង Y មានឌីហ្វីអូម៉ភីស (diffeomorphic) ប្រសិនបើមានអនុវត្តន៍ $F: X \to Y$ ដែលមានឌីផេរ៉ង់ស្យែល (បើទោះបីជា យើងមិនបាននិយាយពីរបៀបដែលយើងរកឌីផេរ៉ង់ស្យែលនៃអនុវត្តន៍រវាងផ្ទៃពីរក៏ដោយ)។ វាបង្ហាញថា ផ្ទៃដែលមានឌីផេរ៉ង់ស្យែលពីរ ឌីហ្វីអូម៉ភីស (diffeomorphic) លុះត្រាតែ ពួកវា អូម៉េអូម៉កហ្វីស។

ការមិនប្រែពេញលេញ អាចត្រូវបានកំណត់ នៅក្នុងករណីនោះ៖ គឺពពួកនៃផ្ទៃ។ ចូរមើលផ្ទៃដែលមានក្នុងរូបទី 6 ផ្ទៃនិមួយៗអូម៉េអូម៉កហ្វីសទៅនឹងស្វ៊ែរមួយ ដែលមានដៃយួរ គឺ 0 ដៃយួរសម្រាប់ស្វ៊ែរ ដៃយួរមួយសម្រាប់កង ដៃយួរពីរ សម្រាប់កងរន្ធពីរ។ល។ ពពួកក្នុងទីនេះគឺជាចំនួនដៃយួរ។ គេពោលថាពពួកគឺជាការមិនប្រែពេញលេញ ដែលមានភាពស៊ីជម្រៅ៖ ចំនួនដៃយួរនេះគឺចង់ពោលថា ផ្ទៃបិទជិតដែលមានទិសដៅ ឌីហ្វីអូម៉ភីសទៅនឹងស្វ៊ែរមួយ ជាមួយនឹងដៃយួរ n ឬក៏ថាជា កងមានរន្ធ n ។ សម្រាប់អ្នកដែលធ្លាប់ឃើញលក្ខណៈអឺលែ (Euler) χ នៃផ្ទៃមួយ ពពួកគឺគ្មានអ្វីផ្សេងទៀតក្រៅអំពី $\frac{1}{2}(2-\chi)$ ។ ដូច្នេះលក្ខណៈ Euler គឺជាការមិនប្រែពេញលេញមួយ។

ទម្រង់ ន័រម៉ាល់ Jordan នៃម៉ាទ្រីសមួយ

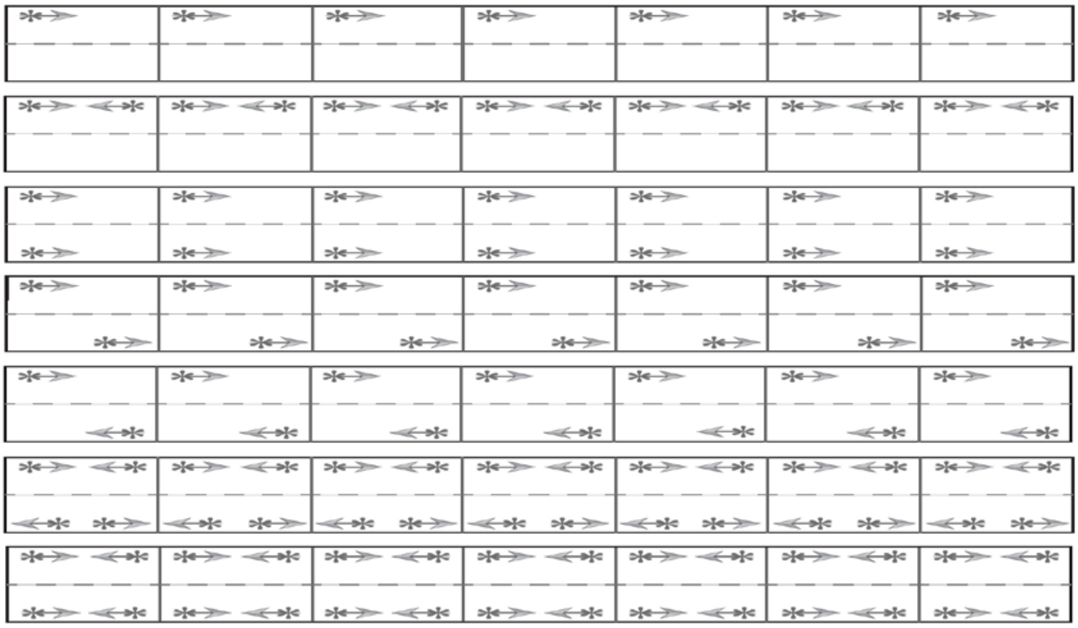
យើងផ្តល់ឧទាហរណ៍នេះ សម្រាប់អ្នកដែលចងចាំពីទម្រង់ន័រម៉ាល់ Jordan នៃម៉ាទ្រីសមួយ។ បើមិនដូច្នោះទេ អ្នកអាចរំលងឧទាហរណ៍នេះ ព្រោះថាទម្រង់ ន័រម៉ាល់ Jordan នៃម៉ាទ្រីសវែងអន្លាយ ហើយមានបច្ចេកទេសស្មុគ្រស្មាញផងដែរ។ យើងគិតអំពីអនុវត្តន៍លីនេអ៊ែរ $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ មួយ ដែលត្រូវបានតំណាងនៅក្នុងគោលកាណូនិកដោយម៉ាទ្រីស $n \times n$ តាងឈ្មោះ A មួយ។ ប្រសិនបើយើងផ្លាស់ប្តូរទៅជាគោលថ្មីមួយ នោះម៉ាទ្រីស A ត្រូវបានផ្លាស់ប្តូរទៅជា ម៉ាទ្រីស $B = PAP^{-1}$ មួយ ដែល P ជាម៉ាទ្រីសចម្លងពីគោលកាណូនិក ទៅជាគោលថ្មី។

សារជាតិដើមនៃទំនាក់ទំនងសមមូលនៃម៉ាទ្រីស គឺភាពប្រហែលគ្នា។ ម៉ាទ្រីស A និង B ប្រហែលគ្នា លុះត្រាតែ មានម៉ាទ្រីស P មួយដែល $B = PAP^{-1}$ ។ នេះមានន័យថា ម៉ាទ្រីសពីរនេះតាងដោយអនុវត្តលីនេអ៊ែរក្នុងគោលពីរផ្សេងគ្នា។ ការមិនប្រែពេញលេញនៃទំនាក់ទំនងភាពប្រហែលនេះ គឺ ទម្រង់ ន័រម៉ាល់ Jordan នៃម៉ាទ្រីស។ ម៉ាទ្រីសពីរប្រហែលគ្នា លុះត្រាតែ វាមានទម្រង់ ន័រម៉ាល់ Jordan ធម្មតាដូចគ្នា រហូតដល់ទៅដុំ Jordan រៀបរយ។ បើនិយាយឱ្យពិបាកស្តាប់ជាងនេះទៀតថា ការមិនប្រែពេញលេញជា ធាតុច្បាស់លាស់សម្រាប់ថ្នាក់សមមូល។

សញ្ញានៃភាពរៀបរយ

យើងពិនិត្យក្នុងទីនេះ n ធាតុ ហើយធ្វើចំណាត់ថ្នាក់ តាមតម្រៀបសេស និងតម្រៀបគូ។ ការជញ្ជូន គឺជាការរៀបធាតុពីរនៃសំណុំ។ ជម្រើសនៃការជញ្ជូន ក្នុងការពន្លាតនៅទីនេះ មិនដូចគ្នាទេ ប៉ុន្តែចម្លាស់នៃចំនួនជញ្ជូនដែលប្រើក្នុងការពន្លាតនេះគឺដូចគ្នា ដូច្នេះយើងអាចកំណត់ចំនួនការជញ្ជូនដោយមិនចាំបាច់គិតពី តម្រៀបសេស ឬតម្រៀបគូឡើយ។ តម្រៀបពីរសមមូលគ្នា លុះត្រាតែ តម្រៀបទីពីរជាបន្សំនៃតម្រៀបទីមួយជាមួយតម្រៀបសេស។ ចម្លាស់នៃចំនួនជញ្ជូន ជាភាពមិនប្រែក្នុងទំនាក់ទំនងសមមូល។

ចំណាត់ថ្នាក់នៃចម្លាក់ជាយជញ្ជាំង



រូបទី៧ ប្រភេទទាំងប្រាំពីរនៃចម្លាក់ជាយជញ្ជាំង

ចម្លាក់ជាយជញ្ជាំងគឺជាបូវែងគ្មានទីបញ្ចប់ ដែលរូបភាពសាឡើងវិញត្រូវតាមខូបដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី៧។ យើងហៅចម្លាក់ជាយជញ្ជាំងថាស៊ីមេទ្រី បើសិនជាវាជាបម្លែងធរណីមាត្រពីចម្លាក់មួយ ទៅចម្លាក់មួយទៀត ៖ ក្នុងករណីនេះយើងថា ចម្លាក់នេះមានភាពមិនប្រែធៀបនឹងបម្លែង។ គ្រប់ចម្លាក់មានភាពមិនប្រែបន្ទាប់ពីបម្រែបម្រួលជាច្រើន ដែលរួមផ្សំពីបម្រែបម្រួល T_L នៃប្រវែង ឬក៏ចម្រាស T_L^{-1}របស់វា។ សូមពិនិត្យរូបទី៧៖ បម្រែបម្រួលទាំងនេះគ្រាន់តែជាស៊ីមេទ្រីនៃចម្លាក់ដំបូង តែប៉ុនណោះ ព្រោះចម្លាក់ដទៃគ្រាន់តែជាស៊ីមេទ្រីបន្ថែម។ ជាតួយ៉ាង ចម្លាក់ទី២ ជាស៊ីមេទ្រីឆ្លុះ ធៀបនឹងខ្សែឈរ ហើយចម្លាក់ទី៣ ស៊ីមេទ្រីឆ្លុះ ធៀបនឹងខ្សែដេកនៅចំកណ្តាល។

ចម្លាក់ពីរសមមូលគ្នា បើសិនវាស្ថិតក្នុងក្រុមស៊ីមេទ្រីតែមួយ។ មានទ្រឹស្តីបទមួយពីថ្នាក់ស៊ីមេទ្រី ដែលថែងថាមានថ្នាក់ស៊ីមេទ្រីតែប្រាំពីរគត់ ដូចដែលបានបង្ហាញក្នុងរូបទី៧។ លើសពីការបង្ហាញបញ្ជីនៃ ស៊ីមេទ្រីរបស់ចម្លាក់ គួរណាស់បង្ហាញបញ្ជីចលករនៃស៊ីមេទ្រី៖ មានចំនួនចលកររាប់អស់ ហើយស៊ីមេទ្រីទាំងអស់កើតឡើងពីបន្សំនៃចលករទាំងនេះ ឬក៏ចម្រាសរបស់វា។ ខាងក្រោមនេះ ជាបញ្ជីចលករ របស់ថ្នាក់ទាំង៧៖

១. $\{T_L\}$

២. $\{T_L, r_v\}$ ដែល r_v គឺជាកាឆ្លុះធៀបនឹងអក្ស័ឈរ

៣. $\{T_L, r_h\}$ដែល r_h គឺជាកាឆ្លុះធៀបនឹងអក្ស័ដេក ធៀបនឹងបន្ទាត់កណ្តាល។

៤. $\{T_L, g_s\}$ ដែលស៊ីមេទ្រីនេះជាបន្សំនៃ $T_{L/2} \circ r_h$

៥. $\{T_L, r_h \circ r_v\}$ ដែល $r_h \circ r_v$ ជារង្វិលមុំ π

៦. $\{T_L, g_s, r_h \circ r_v\}$

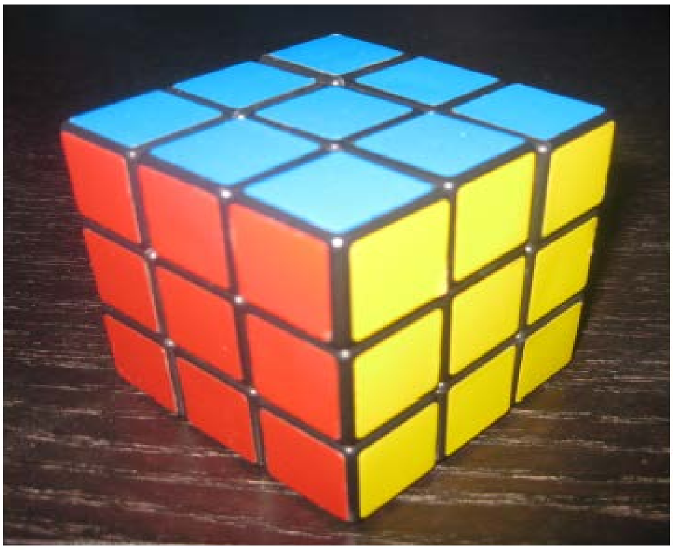
៧. $\{T_L, r_h, r_v\}$

ចំណាត់ថ្នាក់ដដែលនេះអាចធ្វើបានលើការតម្រៀបការ៉ូក្នុងប្លង់៖ តម្រៀបការ៉ូក្នុងប្លង់ មានភាពមិនប្រែសម្រាប់បម្រែបម្រួលពីរ ក្នុងទិសដៅមិនមានអ័ក្សរួម។ មានថ្នាក់សមមូលចំនួន១៧ ដែលគេហៅថាក្រុមគ្រីស្តាល់សាស្ត្រ ព្រោះអនុវត្តនោះគេហៅវាថា គ្រីស្តាល់វិទ្យា។ បញ្ហាដូចគ្នាយើងអាចគិតឃើញសម្រាប់វិមាត្របី ដែលពណ៌ផ្ទៃមិនប្រែក្នុងបម្លែងលីនេអ៊ែរមិនអាស្រ័យតាមវិមាត្របី៖ ក្នុងករណីនេះគេអាចរកឃើញ

ថ្នាក់សមមូល ២៣០។ ចំណាត់ថ្នាក់នេះបានអនុវត្តប្រកបដោយសារប្រយោជន៍ក្នុងគ្រីស្តាល់សាស្ត្រ។ ជាញឹកញយ សារធាតុគីមីដែលស្ថិតតនៅក្នុងថ្នាក់សមមូលមួយ តែងមានលក្ខណៈគីមីរួមជាច្រើន។

គូបរូប៊ីក

គណិតវិទ្យាបានផ្តល់នូវវិធីសាស្ត្រសម្រាប់ដោះស្រាយគូបរូប៊ីក (រូបទី៨)។



រូបទី៨ គូបរូប៊ីក

ប្រសិនបើគូបនៅនឹងថ្កល់ក្នុងលំហ វាមានចលនាផ្លាស់ប្តូរងាយៗចំនួន១២ដែលអាចធ្វើបាន៖ គឺចលនាផ្លាស់ប្តូរទាំងអស់នេះមាន៖ ការបង្វិលមុខមួយចំនួនបួនដងដែលមាន ខាងមុខ ខាងក្រោយ ខាងលើ ខាងក្រោម ខាងឆ្វេង ខាងស្តាំ។ ដោយមុខរបស់គូបមាន៦ និង ការបង្វិលអាចមាន២ផ្សេងគ្នា នោះចលនាផ្លាស់ប្តូរមាន១២។

ឥឡូវអ្នកបារម្ភថា មិត្តរបស់អ្នកបានដោះគូបនោះ ហើយរៀបចូលវិញខុស។ អ្នកខំរៀបគូបឱ្យមានពណ៌ដូចគ្នាវិញ ប៉ុន្តែអ្នកលេងវាជាច្រើនម៉ោងនៅតែមិនបានសម្រេច។ តើវាអាចទៅរួចទេដែលថាអ្នកផ្គុំវាមិនត្រូវរបៀប?

ឥឡូវយើងចង់នាំអ្នកឱ្យស្គាល់ពីទំនាក់ទំនងសមមូលលើរូបសណ្ឋាននៃធ្វើគូបរូប៊ីក៖ រូ បសណ្ឋាននៃគូបកើតឡើងពីបង្គុំបំណែកនៃគូប។ រូបសណ្ឋានពីរគឺសមមូលគ្នាលុះត្រាតែយើងអាចបម្លែងពីមួយទៅមួយទៀតដោយចលនាងាយៗ។

វាមានន័យថាមានភាពមិនប្រែពេញលេញសម្រាប់ទំនាក់ទំនងសមមូលនេះ។ ដូចនេះអ្នកដឹងពីរបៀបឆ្លើយសំនួររបស់អ្នក! វាគ្រប់គ្រាន់ដែលថាអ្នកត្រួតពិនិត្យ បើទីតាំងបច្ចុប្បន្ននៃគូបរបស់អ្នកមានភាពមិនប្រែដូចទៅនឹងរូបសណ្ឋាននៃគូបជាមួយមុខដែលមានពណ៌ដូចគ្នា។ ជាការពិតណាស់ ភាពអាចនៃរូបសណ្ឋានមួយក្នុងចំណោមរូបសណ្ឋានទាំង១២។ ដូចនេះអ្នកមានឱកាស១១ក្នុងចំណោម១២ដែលកើតពីការផ្គុំគូបឡើងវិញខុស។

ការពណ៌នាពីភាពមិនប្រែនេះវាត្រូវការបច្ចេកទេសបន្តិច។ ចំណាំថាចលនាងាយៗនាំឱ្យមានការប្តូរគ្រាប់នៅជ្រុងនិងបានប្តូរជ្រុងជាប់វាផងដែរ។ ទំនាក់ទំនងត្រូវបានបំពេញឱ្យរវាងការប្តូរទាំងពីរនេះសំរាប់រូបសណ្ឋានដែលអាចធ្វើបាន។

ឥឡូវនេះយើងពណ៌នាពីភាពមិនប្រែ។ អ្នកអាចឈប់នៅទីនេះ ហើយរម្លងទៅសេចក្តីសន្និដ្ឋានបាន។

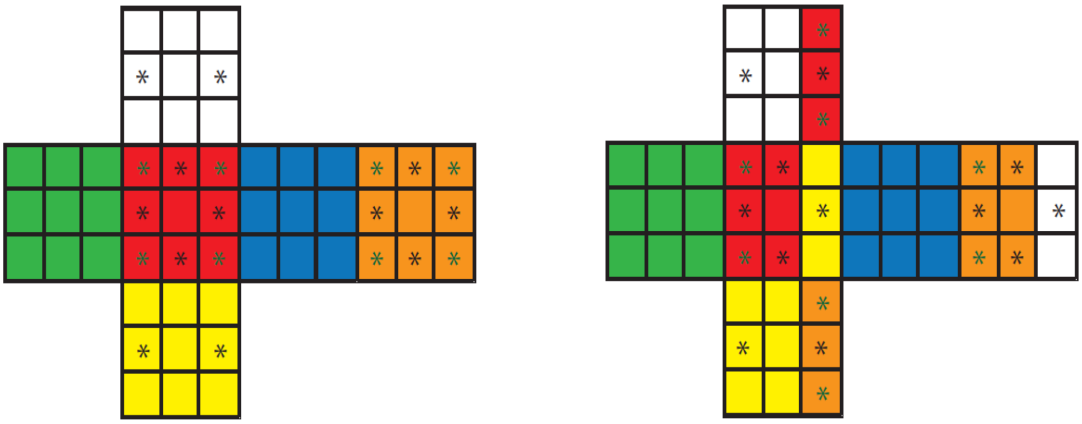
គូបរូប៊ីកមានគ្រាប់គូប៨នៅចំជ្រុង ហើយនិង១២គ្រាប់គូបនៅផ្នែកកណ្តាល។ ទីតាំងមួយត្រូវអាចតាងដោយ

- ការប្តូរ σ នៃផ្នែកជ្រុង

- ការប្តូរ τ នៃផ្នែកខាង
- ការបង្វិលនៃ 0^o ឬ 120^o ឬ 240^o លើជ្រុងនីមួយៗ គឺជាបន្សំជាមួយនៃ០ ១ ឬ ២ នៃរង្វិលតាមមុំ120^o
- រង្វិលនៃមុំ 0^o ឬ 180^o នៃផ្នែកខាង គឺជាបន្សំនៃ ០ឬ១ ឬនៃមុំ180^o

ផ្នែកទីមួយនៃភាពមិនប្រែ ជាផលសងរវាង σ និង τ តាម modulo 2 ដែលយើងហៅថា d។

តើគេវាស់ការរង្វិលនៃគ្រាប់ជ្រុងឬគ្រាប់ខាងតាមរបៀបណា? វាត្រូវបានធ្វើនៅក្នុងវិធីមិនកាណូនិច។ នៅលើគូបដើម យើងសំគាល់មុខខាងក្រៅមួយនៃជ្រុងនីមួយៗ (ក្នុងចំណោមមុខ៣ដូចគ្នា) ហើយមុខមួយនៃផ្នែកខាងនីមួយៗ (ក្នុងចំណោមមុខ២) ឧបមាដូចជាក្នុងរូប(a)។



(a) (b)

រូបទី៩ គ្រាប់ជ្រុងនៃគូបរូប៊ីកកត់សម្គាល់ដោយ ខ្វែងបៃតងចាស់ គ្រាប់ខាងកត់សម្គាល់ដោយខ្វែងពណ៌ខ្មៅ។ យើងឃើញសណ្ឋានផ្សេងមយយទៀតបន្ទាប់ពីបង្វិលមុខពណ៌ខៀវ

យើងចង់គណនាភាពមិនប្រែលើរូបសណ្ឋានដទៃ(ឧបមាដូចជារូបb)។ កាលបើយើងបង្វិលគូប វាអាចកើតឡើងមុខសម្គាល់នៃគ្រាប់ជ្រុងមួយ មិនបិតនៅកន្លែងមុខសម្គាល់ជាចម្លើយទេ។ យើងរាប់ចំនួននៃរង្វិលមុំ 120^o ជុំវិញអ័ក្សពីគ្រាប់ជ្រុងទៅកណ្តាលនៃគូបដើម្បីយកវាទៅកាន់ទីកន្លែងវា។

យើងធ្វើរបៀបនេះសម្រាប់ជ្រុងទាំងអស់ ហើយយើងយកផលបូកនៃចំនួនរង្វិលនោះ ផ្នែកទីពីរនៃភាពមិនប្រែគឺជាផលបូកនេះ, បន្ថយ modulo 3, ដែលយើងហៅថា Co ។ នៅក្នុងរូប(b) សម្រាប់ជ្រុងពីរ យើងត្រូវបង្វិលមួយដង ហើយជ្រុងពីរផ្សេងទៀតយើងត្រូវបង្វិលពីរដង ខណៈដែលយើងមិនប្តូរគ្រាប់ជ្រុង៤ផ្សេងទៀត។ ផលបូកខាងលើត្រូវបន្ថែម៦។ យើងបាន $Co = 0$ សម្រាប់រូប (b)។

យើងធ្វើដូចគ្នាដែរចំពោះគ្រាប់ខាង។ យើងរាប់ចំនួនរង្វិលនៃមុំ 180^o ជុំវិញអ័ក្ស ទៅផ្នែកកណ្តាលនៃគូបដើម្បីយកទៅដាក់ទីកន្លែងវា។

យើងធ្វើបែបនេះចំពោះគ្រាប់ខាងទាំងអស់ ហើយបន្ថែមចំនួនរង្វិល។ ផ្នែកទី៣នៃភាពមិនប្រែគឺជាផលបូកបន្ថយ modulo 2 ដែលយើងហៅថា Si ។ នៅក្នុងរូប (b) មិនត្រូវការបង្វិលគ្រាប់ខាងទេ មានន័យថា $Si = 0$ ។

ភាពមិនប្រែជាត្រីធាតុ(d, Co, Si) ។ យើងអាចអះអាងថា ចំនួននៃរង្វិល ដែលយើងរាប់សម្រាប់គ្រាប់ជ្រុង (ឬ គ្រាប់ខាង) នីមួយៗ គឺគ្រប់គ្រាន់៖ វាអាស្រ័យទៅនឹងមុខពិសេស ដែលយើងបានចំណាំ។ អ្នកយល់ត្រូវ! ប៉ុន្តែអ្វីដែលយើងពិចារណាគឺជាផលបូកនៃចំនួនទាំងនេះ សម្រាប់គ្រាប់ជ្រុងទាំងអស់។ យើងអាចធ្វើការសាក

ល្បងដោយប្តូរមុខចំណាំមួយ ហើយពិនិត្យមើលថាផលបូកនៅដូចពីមុន!

វាជាការងាយស្រួលក្នុងការបញ្ជាក់ថាភាពមិនប្រែគឺ $(0,0,0)$ សម្រាប់ដំណោះស្រាយគូបរូប៊ីក។ វាបង្ហាញឱ្យឃើញថាត្រីធាតុ (d,Co,Si) គឺជាភាពមិនប្រែពេញលេញ។ មានន័យថា ករណីពិសេសគឺ រូបសណ្ឋានដើមនៃគូប ត្រូវអាចដោះស្រាយបាន លុះត្រាតែភាពមិនប្រែគឺ $(0,0,0)$ ។

បន្ទាប់មក តើអ្នកធ្វើយ៉ាងណាដើម្បីផ្គុំគូបនេះពីបំណែករបស់វា? អ្នកអាចដាក់គ្រាប់ជ្រុងទាំងប្រាំពីរដំបូងដោយចៃដន្យ។ នៅពេលដែលអ្នកជំនួសជ្រុងទី៨មួយ អ្នកត្រូវប្រាកដថាអ្នករើសត្រូវទិសដៅរបស់វាដែល $Co=0$ (ឱកាស១ក្នុងចំណោម៣)។ បន្ទាប់អ្នកចាប់ផ្តើមជំនួសគ្រាប់ខាងទាំង១២។ អ្នកអាចជំនួស១០ដំបូងដោយចៃដន្យ។ នៅពេលអ្នកមកដល់គ្រាប់ទី១១ អ្នកត្រូវរើសគ្រាប់ដែលត្រឹមត្រូវក្នុងចំណោមគ្រាប់នៅសល់២ ដែល $d=0$ (ឱកាស១ក្នុង២)។ យើងនៅសល់ផ្នែកខាង១សម្រាប់ទីតាំងទី១២។ អ្នកត្រូវប្រាកដថាអ្នករើសត្រូវទិសដៅរបស់វាដែល $Si=0$ (ឱសកាស១ក្នុងចំណោម២)

សន្និដ្ឋាន

ចំណាត់ថ្នាក់វត្ថុគឺជាបញ្ហាមូលដ្ឋាននៅក្នុងគណិតវិទ្យា និងនៅក្នុងវិទ្យាសាស្ត្រទូទៅ។ ភាពមិនប្រែគឺជាឧបករណ៍ដ៏មានប្រសិទ្ធភាពនៅក្នុងបញ្ហានេះ។ យើងបានដាក់បង្ហាញជាមួយឧទាហរណ៍ជាច្រើន។ វាពិតណាស់ដែលអ្នកនឹងជួបប្រទះការរាវរកជាច្រើនទៀតនៅក្នុងគណិតវិទ្យា ហើយអ្នកអាចចាប់ផ្តើមសន្សំរបស់អ្នក នូវអ្វីដែលចូលចិត្ត។

បកប្រែដោយ: **ហោ លឹមហ៊ាន**
ម៉ុន សុខា
អ៊ុយ សុគន្ធវ័ត្ត