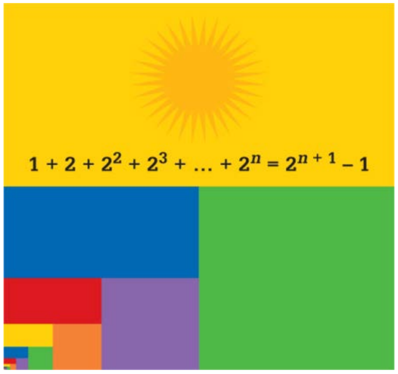
អត្ថបទដកស្រង់ចេញពី

Klein Project Blog

ខចារកំណើន និងខសេសានុមាន[1] (Recurrence and induction)



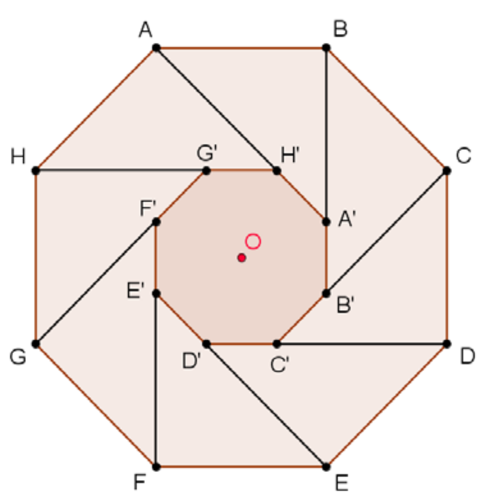
*រៀបរៀងដោយអ្នកនិពន្ធ:*MichéleArtigue និង Ferdinando Arzarello

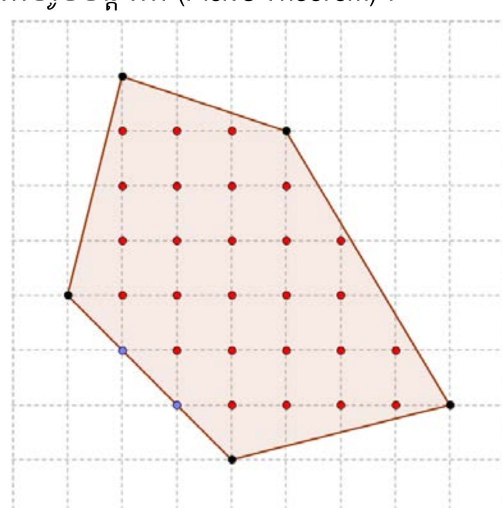
គេឱ្យការ៉េមួយ។ វាជាការងាយស្រួលដើម្បីគូសការ៉េមួយ ដែលមានកំពូលទាំងអស់ជាប្រសព្វនៃក្រឡាបន្ទាត់ (ក្រឡាបន្ទាត់នៃសៀវភៅ) ។ ប៉ុន្តែ តើគេអាចធ្វើបានដែរឬទេចំពោះពហុកោណ និយ័តមួយចំនួនវិញ ជាឧទាហាណ៍អដ្ឋកោណ? ចម្លើយគឺ «មិនអាចទេ» ហើយអាច នឹងបង្ហាញបានសម្រាប់អដ្ឋកោណ ដូចតទៅ (Payan 1994)៖ :

បំភ្លេចរឿងក្រឡាបន្ទាត់ខាងលើបន្តិចសិន។ ជាមួយអដ្ឋកោណនិយ័តនីមួយៗ (ដែលមានជ្រុងទាំងអស់មានប្រវែងស្មើគ្នា និងរង្វាស់មុំទាំងអស់ប៉ុនគ្នា) យើងធ្វើការភ្ជាប់ទៅនិងអដ្ឋកោណផ្សេងទៀត ដូចបង្ហាញក្នុងរូបទី ២។ ចំនុច A′ ជារូបភាពនៃ A តាម រង្វិលច្រាសទ្រនិចនាឡិកាបានមុំ៩០^0 ដែលមាន B ជាផ្ចិត។ B′ ជារូបភាពនៃ B តាមរង្វិលច្រាសទ្រនិចនាឡិកាបានមុំ៩០^{0}ដែលមាន C ជាផ្ចិត និង បន្តបន្ទាប់ទៅ។ យើងបង្ហាញថា យើង ទទួលបានពហុកោណនិយ័តផ្សេងមួយទៀត ដូចទៅនិងពហុកោណនិយ័តទីមួយដែរ ដែលមាន 0 ជាផ្ចិតរួម។ ផ្ទៃរបស់អដ្ឋកោណទីពីរតូចជាងដាច់ខាតផ្ទៃនៃអដ្ឋកោណទីមួយ។

ឥឡូវសូមត្រលប់ទៅមើលពហុកោណនិយ័ត ដែល កំពូលរបស់វាគឺជាប្រសព្វនៃក្រឡាបន្ទាត់។ យើងធ្វើការភ្ជាប់ទៅនឹងពហុកោណ P នូវចំនួន S(P) គឺជាប្រសព្វនៃក្រឡាបន្ទាត់ ដែលស្ថិតនៅលើពហុកោណ (មានន័យថាចំណុចប្រសព្វនៃក្រឡាបន្ទាត់ទាំងអស់ដែលស្ថិតនៅខាងក្នុងពហុកោណ មិនរាប់អ្វីដែលនៅលើជ្រុងទេ)។ ឧទាហរណ៍: ប្រសិនបើ P គឺជាបញ្ចកោណនៃរូបទីបី នោះS(P) = 26។

(ចំណាំ: ចំនួននេះទាក់ទងទៅនិងក្រឡាផ្ទៃនៃបញ្ចកោណ តាមរូបមន្ត ភីក (Pick′s Theorem)។





រូបទី២:សំណាង់នៃពហុកោណទីពីរ រូបទី៣ :ការគណនានៃចំនួនS(P)

[1] ការកំណត់ថាពិតប្រាកដបន្ទាប់ពីបានសង្កេតផ្ទៀងផ្ទាត់ជាច្រើនដង

ឧបមាថា យើងអាចគូសអដ្ឋកោណនិយ័តមួយដែលមានកំពូលទាំងអស់គឺជាប្រសព្វនៃក្រឡាបន្ទាត់: P_1។ តាម រយៈ ការបកស្រាយពីមុននេះ យើងអាចគូសភ្ជាប់ទៅនិងអដ្ឋកោណនិយ័តP_2 មួយទៀតដែលកំពូលរបស់វាគឺជាប្រសព្វនៃក្រឡាបន្ទាត់ដែរ ដោយ លក្ខណៈនេះត្រូវបានរក្សាទុកតាមរយៈការវិលនៃមុំ 90^0 ដែលមានផ្ចិតស្ថិតនៅលើប្រសព្វនៃក្រឡាបន្ទាត់។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ចំនួនគត់ S (P_2) ប្រាកដជាតូចជាង S(P_1)។ ប្រើវិចារកំណើនលក្ខខណ្ឌនេះត្រូវបានបញ្ចប់ជាមួយលទ្ធផលផ្ទុយ។

យើងបានបង្ហាញថា មិនអាចធ្វើបានទេចំពោះអដ្ឋកោណដែលមានកំពូលជាប្រសព្វ នៃក្រឡាបន្ទាត់ ដោយប្រើវិធីសាស្ត្រនព្វន្តដ៏អស្ចារ្យ តាំងពីសម័យលោក Fermat: «ដំណោះស្រាយតាមភាពចុះគ្មានទីបញ្ចប់» (infinite descent)។ តើមានអ្វីខ្លះស្ថិតនៅក្នុងវិធីសាស្ត្រនេះ? វាផ្ទុកនូវ ភាពមិនអាចធ្វើទៅបាន នៃការបង្កើតស្វីតតួចុះដាច់ខាតគ្មានទីបញ្ចប់ នៃចំនួនធម្មជាតិ។ វា ឈរលើលក្ខណសម្បត្តិនៃលំដាប់របស់សំណុំចំនួនធម្មជាតិៈ លក្ខណសម្បត្តិ លំដាប់រៀបរយគ្រប់ ដែល មានន័យថាគ្រប់សំណុំរងមិនទទេទាំងអស់ មានធាតុតូចបំផុតមួយ។ ពិតណាស់

ឧបមាថាយើងអាចបង្កើតស្វីតចុះគ្មានទីបញ្ចប់នៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន (u_n) ។ តាង S ជាសំណុំតួទាំងអស់នៃស្វីត $S=\{u_o, u_{1,} \dots\dots\dots, u_n \dots\dots..\}$។ ដូច្នេះ S មានធាតុតូចបំផុតមួយតាងដោយ α។ α ជាធាតុនៃស្វីត ដូចនេះមាន k ដែល $\alpha = u_k$។ តែ $u_{k+1} < u_k$ និង u_{k+1}ជាធាតុនៃ S ដែលផ្ទុយនឹងនិយមន័យ α។

វិសេសានុមានគណិតវិទ្យា និងលំដាប់រៀបរយគ្រប់នៃចំនួនធម្មជាតិ

ជាទូទៅវិសេសានុមានគណិតវិទ្យាត្រូវបានគេបង្ហាញតាំងពីថ្នាក់វិទ្យាល័យ ជាការពិតវាជាលំដាប់រៀបរយគ្រប់នៃចំនួនធម្មជាតិ។ វាជាស្វ័យសត្យទីបីរបស់លោក ភីណូ (Peano) សម្រាប់នព្វន្តសាស្ត្រ (1908) ដែលត្រូវបានពោលដូចខាងក្រោម: «បើសំណុំ S ផ្ទុកធាតុ 0 ហើយបើសិនជាធាតុ α ក្នុង S មានតួបន្ទាប់នៃ α ក៏នៅក្នុង S ដែរ នោះ S ផ្ទុកគ្រប់ចំនួនធម្មជាតិទាំងអស់។ ជាទូទៅពណ៌នាវាដូចខាងក្រោម:

បើលក្ខណសម្បត្តិ P មួយ នៃចំនួនធម្មជាតិ ពិតចាប់ពីសូន្យ ហើយ វាពិតរហូតដល់ $n+1$ ជាតួបន្ទាប់ នៃគ្រប់ចំនួនធម្មជាតិ n នោះវានឹងពិតសម្រាប់គ្រប់ចំនួនធម្មជាតិទាំងអស់។

បើសន្មតថាលំដាប់នៃចំនួនធម្មជាតិជាលំដាប់រៀបរយគ្រប់ នោះវិសេសានុមានគណិតវិទ្យា ពិតជាកើតមាន។ ពិតណាស់ ឧបមាថា លក្ខណសម្បត្តិ P មិនពិតសម្រាប់គ្រប់ចំនួនធម្មជាតិទេ។ យើងតាង S ជាសំណុំមិនទទេ ហើយមាន n_0 ជាធាតុតូចបំផុតដែល $n_0 \neq 0$ ដែល 0 ប្រកបដោយលក្ខណសម្បត្តិ P។ នោះមានធាតុបន្ទាប់ $n_0 - 1$ ដែលមិននៅក្នុងS។ តែ $n_0 - 1$ មានលក្ខណសម្បត្តិ P ហើយដូចគ្នានេះសម្រាប់n_0ដែលផ្ទុយនិងនិយមន័យនៃn_0

វិសេសានុមានគណិតវិទ្យា ក៏ត្រូវបានគេប្រើដើម្បីកំនត់អនុគមន៍ដែរ។ឧទាហរណ៍ នេះជា ការប្រើពេលយើងកំនត់ស្វីតមួយ តាមវិសេសានុមាន ដោយឱ្យទំនាក់ទំនង$u_{k+1} = f(u_n)$ ដែលfជាអនុគមន៍កំណត់លើ $\mathbb{N}$ និង u_oជាតួទីមួយ។ យើងវាថា ជានិយមន័យតាមវិសេសានុមាន។

ខចារកំណើន និងខសេសានុមាន : ទូទៅកម្មទីមួយ

ជាទូទៅយើងអាចគិតតាមវិសេសានុមាន លើគ្រប់សំណុំលំដាប់រៀបរយគ្រប់។ ចូរពិចារណា លើឧទាហរណ៍នៃសំណុំ $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ ដែលមានធាតុជាលំដាប់អក្ខរក្រម $(a,b) \le (c,d)$ បើ $a \le c$ និង $b \le d$ ។ វាជាទំនាក់ទំនងរៀបរយគ្រប់។ ពិតណាស់ បើតាង S ជាសំណុំរងមិនទទេ នៃ $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ នោះមានករណីពីរកើតឡើង:

- ធាតុនៃ S ទាំងអស់មានទម្រង់ $(1,b)$ ។ នោះ $\{b \mid (1,b) \in S\}$ ជាសំណុំរងមិនទទេនៃ $\mathbb{N}$ និងមាន b_0 ជាធាតុតូចបំផុតមួយ។ ដូចនេះ$(1,b_0)$ជាធាតុតូចបំផុតនៃ S ។
- មានធាតុ S មួយចំនួនទៀតមានទម្រង់ $(0,b)$ នោះបង្ហាញថា S មានធាតុតូចបំផុតមួយ គឺគ្រាន់តែបង្ហាញថា $\{b \mid (0,b) \in s\}$ គឺគ្រប់គ្រាន់ហើយ។

ដូចលំដាប់អក្ខរក្រមដែរ $\mathbb{N}^p$ គឺជាលំដាប់រៀបរយគ្រប់ដូចគ្នា។ យើង ទុកឱ្យអ្នកអានបកស្រាយ ករណីនេះដោយខ្លួនឯង។ ដូច្នេះហើយ មិនអាចមានស្វ៊ីតចុះដាច់ខាតគ្មានទីបញ្ចប់ ក្នុងសំណុំទាំងនេះទេ បើទោះបីជាមានធាតុជាច្រើនរាប់មិនអស់ ដែលតូចជាងធាតុណាមួយ ក្នុងទម្រង់ $(a_1, a_2, \dots\dots, a_p)$, $a_1 \ne 0$ និងមួយចំនួនទៀតមានទម្រង់$(b_1, b_2, \dots\dots, b_p)$ ដែល$b_1 < a_1$។

ក្នុង$\mathbb{N}^p$ គោលការណ៍នៃការចុះគ្មានទីបញ្ចប់ ដែលយើងបានប្រើក្នុងឧទាហរណ៍ទី១ ត្រូវបានគេយកអនុវត្តន៏។ នៅក្នុង $\mathbb{N}^p$ យើងក៏អាចកំណត់អនុគមន៍តាមវិសេសសានុមាផងដែរ។ ជាឧទាហរណ៍ ករណី អនុគមន៏ដ៏ល្បីល្បាញ ពី $\mathbb{N}^2$ ទៅ $\mathbb{N}$ កំណត់ដោយ អែកឃឺម៉ាន់ (Ackermann) ក្នុងឆ្នាំ ១៩៣២ ដែលយើងនិងពិភាក្សាបន្ទាប់ទៀត។

ខសេសានុមាន និងចំនួនរៀបរយ

ក្នុងទ្រឹស្តីសំណុំ សញ្ញាណនៃលំដាប់រៀបរយគ្រប់ ដែលមានសារសំខាន់ចំពោះហេតុផលគណិតវិទ្យា ត្រូវបានគេមើលឃើញតាមរយៈសញ្ញាណនៃចំនួនរៀបរយ ហើយមិនគ្រាន់តែជាការពន្យល់ថា វាជាលំដាប់រៀបរយគ្រប់ដូចដែលយើងបានឃើញទេ។ ចំនួនរៀបរយនិងលទ្ធផលចំនួនធម្មជាតិគឺ ជាចំនួនរៀបរយមានកំណត់ ដែលត្រូវបានគេកំណត់ថា ជាសំណុំរៀបរយ តាមលក្ខណៈផ្ទាល់ និងឆ្លង (សំណុំ X មានលក្ខណៈឆ្លង បើគ្រប់ធាតុ z ទាំងអស់ នៃ $y \in X$ នោះ $z \in$X ដែរ) ប៉ុន្តែក្នុងផ្នែកនេះ យើងគ្រាន់តែយល់ឃើញ តាមការស្រមើស្រមៃពីលក្ខណៈឆ្លងរៀបរយ បង្ហាញដោយលោក កាន់ទ័រ (Cantor) នៅចុងសតវត្សទី១៩។ ចំនួនតូចគ្មានទីបញ្ចប់ ដែលតាងដោយ ω ហើយជាប្រជុំនៃ ចំនួនកំណត់ បានទាំងអស់។ វា តំណាងឱ្យលំដាប់លើចំនួនធម្មជាតិ។ មានធាតុបន្ទាប់ $\omega + 1$ ដែលជាធតុបន្ទាប់នៃ $\omega + 2$ និងបន្តបន្ទាប់ទៀត។ ចំនួនរៀបរយតូចបំផុត មានតម្លៃ ធំជាង $\omega + n$ គឺ $\omega + \omega$ ឬ $\omega.2$ ។ ចំនួនរៀបរយតូចបំផុត ហើយមានតម្លៃធំជាង $\omega.n$ គឺω^2 និងបន្តបន្ទាប់ទៀត។

$$0,1,2,\dots n \dots \omega, \omega+1, \omega+2, \dots \omega+n \dots \omega.2, \omega.2+1, \omega.2+2, \dots \omega.2+n \dots \omega.3 \dots\ \omega.n \dots \omega^2 \dots \omega^3 \dots \omega^\omega \dots$$

ជាការពិតមានចំនួនរៀបរយពីរប្រភេទ ដែល ជាតួបន្ទាប់នៃចំនួនរៀបរយដែលឱ្យ ដូចជា $\omega + n, \omega^\omega + n, n \ne 0$ ដែលលំដាប់ទាំងនេះ មិនមែនជាតួបន្តបន្ទាប់គ្នាទេ តែវាជាប្រជុំនៃចំនួនរៀបរយតូចជាងទាំងអស់ ដូចជា $\omega,, \omega^n, \omega^\omega \dots$ ដែលបានបង្ហាញខាងលើ។ យើងសម្គាល់ ឃើញថា លំដាប់ នៃ $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ ផ្តល់ឱ្យទៅសំណុំនេះ នូវលំដាប់ដែលត្រូវគ្នានឹងលំដាប់នៃចំនួនរៀបរយ$\omega + \omega$។ ទូទៅកម្មនៃលំដាប់អក្ខរក្រមធាតុលើ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ត្រូវគ្នានឹង ω^2

,... ប៉ុន្តែមានចំនួនរៀបរយច្រើនជាងនេះទៀត ដែលអាចរាប់បាន។ គេបង្ហាញវាក្នុងទ្រឹស្តីសំណុំ ដោយ « ស្វ័យសត្យនៃជម្រើស» ដែលថា សំណុំណាក៏ដោយ ក៏អាចរៀបរយបានដែរ។

យើងអាចកំណត់អនុគមន៍តាមវិចារកំណើនលើចំនួនរៀបរយផងដែរ។ ដើម្បីកំនត់អនុគមន៍ តាមវិចារកំណើនលើចំនួនរៀបរយ α យើងត្រូវឱ្យតម្លៃរបស់វាត្រង់ 0 នោះយើង នឹងទទួលបានតម្លៃ $f(\alpha)$ ពីតម្លៃនៃអនុគមន៍ដើម។ គួរកត់សម្គាល់ថា គួរពិចារណាករណីពីរ ដើម្បីកំនត់ $f(\alpha)$ ថាតើ α ជាលីមីត ឬតួបន្តបន្ទាប់។ សម្រាប់ចំនួនរៀបរយ យើងអាចបង្ហាញតាមភាពចុះគ្មានទីបញ្ចប់ ហើយអត្ថបទខ្លី Goodstein ជាឧទាហរណ៍ដ៏ល្អនៃដំណោះស្រាយ។

អំពី អនុគមន៍ អែកឃឺម៉ាន់ និងអំណះអំណាងអង្កត់ទ្រូង

គេឱ្យឧទាហរណ៍អនុគមន៍មួយដែលកំណត់ដោយវិចារកំណើនជាអនុគមន៍អែកឃឺម៉ាន់ ដូចបានរៀបរាប់ខាងលើ។ យើងតាងដោយ A ហើយមានលក្ខខណ្ឌដូចខាងក្រោមៈ

- មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន y, $A(0,y) = y+1$
- មានចំនួនគត់វិជ្ជមាន$x, A(x+1,0) = A(x,1)$
- គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន$(x,y), A(x+1,y+1) = A(x, A(x+1,y))$

តម្លៃត្រង់ចំណុច(x,y) រកឃើញភ្លាមៗ បើ x=0។ ប្រសិនបើ $x \neq 0$ នោះយើងគណនា$A(x,y)$ ដោយប្រើតម្លៃនៃអនុគមន៍ត្រង់ចំណុច (c,d) ដែល(c,d)<(x,y) ជាធាតុមានលំដាប់។ ការគណនានេះចាំបាច់ត្រូវឱ្យវាជាស្វ៊ីតចុះដាច់ខាតនៃចំណុចនោះ ដោយលំដាប់អក្ខរក្រមជាលំដាប់រៀបរយគ្រប់។ ផ្ទុយមកវិញពាក្យថា ស្វ៊ីតត្រូវមានតួច្រើន។ តើយើងប្រើវិធីសាស្ត្រអ្វីខ្លះដើម្បីរក$A(3,2)$?

ចាប់ផ្តើមពីឧទាហរណ៍ងាយមួយ : $A(2,2)$ ដោយប្រើតារាងខាងក្រោម :

x / y	0	1	2	3	...
0	1	2	3		
1	2	3	5		
2	3	4			
3	4	5			
...					

លក្ខខណ្ឌទី១ : $A(0,y) = y+1$ អាចឱ្យយើងបំពេញក្នុងជួរឈរទី១បាន។ យើងទទួលបានៈ
$A(1,0) = A(0,1) = 2, A(1,1) = A(0, A(1,0)) = A(0,2) = 3,$
$A(1,2) = A\big(0, A(1,1)\big) = A(0,3) = 4$ និងជាទូទៅ យើងទទួលបានៈ

$$A(1,n+1) = A\big(0, A(1,n)\big) = A(0,n+1) = n+2$$

យើងអាចរកៈ

$A(2,0) = A(1,1) = 3, A(2,1) = A\big(1, A(2,0)\big) = A(1,3) = 5$ ដូចនេះ
$A(2,2) = A\big(1, A(2,1)\big) = A(1,5) = 7$

យើងដោះស្រាយរកតម្លៃ $A(2,2)$ យើងត្រូវរកតម្លៃទាំងអស់នៃអនុគមន៍ចំពោះគូនៃជួរឈរទី១ រហូតដល់ (0,6) ជួរឈរទី២ រហូតដល់ (1,5) និងជួរឈរទី៣រហូតដល់ (2,2) គឺយើងប្រើអស់ 15 តម្លៃ។

តើមានអ្វីកើតឡើងបើយើងចង់រក$A(3,2)$ និងចុងក្រោយតើ $A(3,2)$ មានតម្លៃប៉ុន្មាន? យើងទុកឱ្យអ្នកអានរាវរកដោយខ្លួនឯង។

ដោយកំណត់តម្លៃថេរសម្រាប់អថេរមួយនៃពីរអថេររបស់អនុគមន៍ អែកឃឺម៉ាន់ យើងទទួលបាន អនុគមន៍មួយ ជាទូទៅគេហៅថាអនុគមន៍នព្វន្ត។ យើងសរសេរ A_n ជាអនុគមន៍ដែលទទួលបានពីការជ្រើសរើសអថេរទី១ គឺ n។ យើងឃើញថា$A_0(y) = A(0,y) = y + 1$ ដូចនេះ A_0 ជាតួបន្ទាប់ ហើយ $A_1(y) = y + 2$។ យើងអាចបញ្ជាក់ថា $A_2(y) = 2y + 3$ និង $A_3(y) = 2^{y+3} - 3$។ កន្សោមកាន់តែស្មុគ្រស្មាញយ៉ាងឆាប់ ដោយ ប្រមាណវិធីស្វ័យគុណនិងតម្លៃ $A(x,y)$ គឺកាន់តែច្រើនទៅៗ ចំពោះតែពីបីជំហានដំបូងប៉ុនណោះ។ ឧទារណ៍ $A(5,0)$=65533 និង $A(4,2)$ ជាចំនួនមានលេខ 19729 ខ្ទង់។

តាមការពិតយើងក៏អាចបង្ហាញថាអនុគមន៍ g កំណត់ដោយ $g(x) = A(x,x)$ គឺជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវគ្រឡប់ទាំងអស់ ដែលគេអាចថាជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ដោយតួបន្ទាប់ និងចំណោល ពី $\mathbb{N}^p$ ទៅ $\mathbb{N}$ តាមរយៈ ភាពសមាស និងវិចារកំណើន នោះនឹងមានចំនួនគត់វិជ្ជមាន N មួយ ដែល $g(x) > f(x)$ ចំពោះ $x > N$។ វិធីសាស្រ្តនេះបង្ហាញថាមានអនុគមន៍អាចគណនាបាន ដែលមានព្រីមីទីវមិនគ្រឡប់។ អនុគមន៍ អែកឃឺម៉ាន់មួយ ជាប្រភេទនោះ។ ប៉ុន្តែ ជាញឹកញយ អនុគមន៍នៃចំនួនគត់ ដូចជាអនុគមន៍ដែលប្រើនៅមធ្យមសិក្សា មានព្រីមីទីវគ្រឡប់។ អនុគមន៍នៃពីចំនួនធម្មជាតិ ផលបូកឬផលគុណរបស់វា ជាព្រីមីទីវ ការត្រលប់។ ពិតណាស់ យើងអាចកំណត់វាតាមវិចារកំណើនៈ ចំពោះគ្រប់$x, x + 0 = x$ និង $x.0 = 0$ និងចំពោះគ្រប់ $y, x + (y+1) = (x+y) + 1$ និង $x(y+1) = xy + x$។ យើងទុកភារៈជូនអ្នកអាន ដើម្បីធ្វើវិចារកំណើន ដែលភ្ជាប់គូនៃចំនួនធម្មជាតិ(x,y)ទៅx^y ក៏ជាអនុគមន៍ព្រីមីទីវគ្រឡប់ ដូចជាវិចារកំណើននៃអនុគមន៍ដើម។ ជាទូទៅ អនុគមន៍មួយ ដែលអាចកំណត់ដោយអនុគមន៍ព្រីមីទីវត្រលប់ ហើយវិធីសាស្រ្តដោយប្រើជុំមានទម្រង់ $(k = 1, n)$ ជាអនុគមន៍មានព្រីមីទីវគ្រឡប់។

ដំណោះស្រាយ $\rightarrow$ ទាមទារនូវអំណះអំណាងអង្កត់ទ្រូង។ អណះអំណាងនេះ ត្រូវបានគេរកឃើញតាំងពីឆ្នាំ១៨៧៤ ដោយលោក ជចក៍ ខែនទ័រ (Georg Cantor) ដែលបង្ហាញថា សំណុំនៃចំនួនពិត មិនអាចរាប់បានទេ មានន័យថា គ្មានភាពជាគូត្រូវគ្នារវាង $\mathbb{R}$ និង $\mathbb{N}$ ទេ។ ឆ្នាំ១៨៩១ គាត់ប្រើវិធីសាស្រ្តនេះម្តងទៀត ដើម្បីបង្ហាញថា សំណុំស្វ័យគុណ នៃសំណុំ X (មានន័យថា សំណុំនៃសំណុំរងទាំងអស់នៃ X) មានកាឌីណាល់ តូចជាងដាច់ខាត ជាងកាឌិណាល់នៃ X ។ ការបង្កើតថ្មី នូវអំណះអំណាងអង្កត់ទ្រូង គឺជាជំហានដ៏មានសារសំខាន់បំផុត ក្នុងការអភិវឌ្ឍន៍ វិស័យគណិតវិទ្យា។ ជាពិសេស ជាចំណុចចាប់ផ្តើមនៃការពន្យល់លទ្ធផលជាច្រើន រួមទាំងទ្រឹស្តីបទមិនអាចចប់ ហ្គូឌិល និងទ្រឹស្តីបទនៃការគណនាមួយចំនួនទៀត។ ប៉ារ៉ាដុក រូស្សែល ក៏ពឹងផ្អែកលើគំនិតនេះដែរ។ យើងអាចសិស្សស្គាល់រសជាតិអំណះអំណាងនេះនៅវិទ្យាល័យ តាមរយៈការបង្ហាញថាចំនួនក្នុងចន្លោះ [0,1) មិនអាចរាប់

បាន ដោយប្រើភាពជាក់ស្តែង ដែលគ្រប់ចំនួនពិតទាំងអស់អាចតំណាងដោយចំនួនទសភាគតែមួយគត់ (បង្ហាញត្រឹមតែទម្រង់ទសភាគគត់ មិនមែនចំនួនដែលបន្តដោយលេខរាប់មិនអស់ 9)។ ឧបមាថាមានភាពជាគូត្រូវគ្នា rvag ចន្លោះ [0,1) និង ℕ នោះផ្តោតការពិចារណាលើស្វ៊ីត (α_n) នៃចំនួនពិតទាំងនេះ។ ការបង្ហាញនូវទសភាគមិនពិតប្រាកដនៃចំនួនពិត α_n មានទម្រង់: $0, a_1^n, a_2^n \dots$ និងប្រហែលជាបញ្ចប់ដោយលេខ 0 ឥតទីបញ្ចប់។ វិភាគលើចំនួនពិត α ដែលទសភាគមានទម្រង់$0, b_1^n, b_2^n \dots\dots\dots\dots$ដែល$b_k = a_k^k - 1$បើ$a_k^k \neq 0$និង$b_k = a_k^k + 1$បើ$a_k^k = 0$។ វាកាន់តែច្បាស់ថា $0, b_1^n, b_2^n \dots$គឺជាចំនួនទសភាគដែលតាងចំនួនពិត β ក្នុងចន្លោះ[0,1)ដែល β មិនអាចស្មើធាតុណាមួយនៃស្វ៊ីត (α_n) ទេ។ ដូចនេះចន្លោះ[0,1) មិនអាចរាប់បាន ហើយក៏មិនមែនជាសំណុំនៃចំនួនពិតដែរ។

សន្និដ្ឋាន

គោលការណ៍នៃវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា ត្រូវបានគេប្រើតាំងពីសម័យបុរាណ។ ជាឧទាហរណ៍ ក្នុង ធាតុរបស់អឺគ្លីដ ត្រូវបានគេប្រើដើម្បីបង្ហាញថាមានចំនួនបឋមច្រើនរាប់មិនអស់។ ដូចគ្នាដែរគោលការណ៍ភាពចុះគ្មានទីបញ្ចប់ ត្រូវបានគេប្រើអស់រយៈច្រើនរយឆ្នាំមកហើយ ហើយជាញឹកញាប់ ទាក់ទងនឹង លោកហ្វែម៉ា (Fermat) ដែលបានប្រើវាជាច្រើនលើក ក្នុង ការងាររបស់គាត់ពីទ្រឹស្តីចំនួន។ ម្យ៉ាងវិញទៀត ការបង្ហាញនូវភាពសមមូលនៃគោលការណ៍ទាំងពីរនេះ គឺទើបតែថ្មីៗនេះមកពីការវិវឌ្ឍន៍នៃគណិតវិទ្យាតក្ក។ ឧបករណ៍សំខាន់ដែលប្រើ គឺ សញ្ញាណ នៃការរៀបរយដែលលោក ជចច៍ កាន់ទ័រ សង្កេតឃើញនូវ «មូលដ្ឋានគ្រឹះនៃការគិត»។ វាអនុញ្ញាតឱ្យយើងឃើញនូវភាពសមមូលរវាងវិចារកំណើនគណិតវិទ្យា និងភាពចុះគ្មានទីបញ្ចប់ ហើយលើសពីនេះ វាក៏បានជួយដល់ការងារលើសំណុំចំនួនមិនធម្មជាតិផ្សេងទៀត ដោយអាចឱ្យយល់បានពីករណីពិសេស ដែល វិចារកំណើនធ្វើការមិនត្រឹមតែជាអ្នករាប់ប៉ុណ្ណោះទេ (ដូចជាករណីអនុគមន៍ អែកឃឺម៉ាន់)។ ការជ្រើសរើសឧទាហរណ៍ពីដំបូងក្នុងអត្ថបទខ្លីនេះ ជាការបង្ហាញថាវិចារកំណើនគឺជាឧបករណ៍ទូទៅរបស់គណិតវិទ្យា គឺមិនគ្រាន់តែប្រើក្នុងទ្រឹស្តីចំនួនទេ។ វាស្តែងឱ្យឃើញពីតួនាទីដ៏មានសារសំខាន់ក្នុងគណិតវិទ្យាចំនួនរាប់អស់។

អត្ថបទខ្លីនេះក៏ជាឱកាសឱ្យយើងផ្តោតលើសំណួរដ៏មានសារប្រយោជន៍ដទៃ ក្រៅពី វិចារកំណើន ប៉ុន្តែមានភាពមិនអាស្រ័យ ដូចជាការគណនាតាមកុំព្យូទ័រជាដើម។ គណិតវិទ្យាភាវូបនីយកម្ម នៃការគណនាតាមបែបអព្ភន្តរញាណ ដែលតម្រូវឱ្យមានបម្លែងកម្មវត្ថុផ្សេងៗនៃគណិតវិទ្យាចំនួនរាប់អស់ ហើយនិងការប្រើអំណះអំណាងអង្កត់ទ្រូង បានជួយឱ្យយើងរកឃើញនូវលទ្ធផលដ៏មានសារប្រយោជន៍ក្នុងវិស័យជាច្រើន។ ជាពិសេសវាក៏ជាមូលដ្ឋានគ្រឹះនៃទំនាក់ទំនងរវាងគណិតវិទ្យានិងវិទ្យាសាស្ត្រកុំព្យូទ័រដែរ។

ឯកសារយោង

[1]CaludeC.,Marcus S.,Tevy,I(1979).The first example of a recursive function which is not primitive recursive,Historia Math.,vol6.n.4.380-84.

[2]Cori,R.,Larscar D.().Logique mathématique,tome2:Fonctions récyrsives,théoreme de Gödel,théorie des ensembles,théorie des modéles.Paris:EditionsDunod.

[3]Payan C.(1992).une belle histoire de polygones et de s de pixels.MATh.en.JEANS˝auPalais de la Découverte,pp.99-106.